

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

December, 2011

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN
PHYSICS-III

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

Note : Attempt *all* questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.

1. Attempt *any five* parts : 2x5=10

- (a) A matrix A is not hermitian. Show that $i(A - A^+)$ is hermitian.
- (b) Obtain the eigen values of the real symmetric matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) ε_{ijk} is a totally antisymmetric tensor with respect to all pairs of indices. Show that $\varepsilon_{ijk} A_j A_k = 0$ where A_j is a vector.
- (d) What are the requirements to be satisfied by the elements of a set $G = \{ x, y, z, \dots \}$ to be called a group ?

- (e) Show that $f(z) = z - z^*$ is not an analytic function.
- (f) Locate and name the singularities of the function $f(z) = \frac{ze^z}{(z-a)^2}$.
- (g) Determine the Laplace transform of $a + be^{ct}$.
- (h) Define the Fourier transform of a function. Using this definition, obtain the expression for the Fourier transform of an even function.

2. Attempt *any two* parts :

- (a). Write down the matrix of coefficients of the equation $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 12$. Calculate its eigen values and use the diagonal matrix to write the equation in new variables. 5
- (b) Define symmetric and antisymmetric tensors of rank 2. Show that a symmetric tensor A_{ij} remains symmetric under coordinate transformations. 5
- (c) Show that the cube roots of unity form a cyclic group under multiplication. 5

3. Attempt *any two* parts :

(a) Evaluate the integral

5

$$\oint_c \frac{e^z}{z^2 - a^2} dz \text{ over a circle } c \text{ of } |z| > a$$

(b) Evaluate $\int_0^\infty \frac{2 dx}{x^2 + 1}$.

5

(c) Obtain the Taylor series expansion of

5

$$f(z) = \frac{1}{z - a} \text{ about } z = 2.$$

4. Attempt *any one* part :

(a) Calculate the Fourier transform of the function $f(x) = e^{-a|x|}$.

10

(b) Use Laplace transform method to solve the initial value differential equation

10

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4 y = 4$$

with $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

5. Attempt *any one* part :

- (a) The Bessel function for a +ve integer n is 10
given by

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Establish the recurrence relation

$$\frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) = J_{n-1}(x)$$

- (b) Expand the function $f(x) = x^2$ in a series of 5+5
the form $\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x)$. Hence, evaluate

the integral $\int_{-1}^1 x^2 P_n(x) dx$.

विज्ञान स्नातक (बी.एससी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसंबर, 2011

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : सभी प्रश्न करें। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।
प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. कोई पाँच भाग करें :

2x5=10

(a) आव्यूह A हर्मिटी नहीं है। सिद्ध करें कि : $i(A - A^+)$
हर्मिटी है।

(b) एक वास्तविक सममित आव्यूह :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

के आइगेन मान प्राप्त करें।

(c) ε_{ijk} सभी सूचकांक युग्मों के प्रति पूर्णतया प्रतिसममित
टेन्सर है। सिद्ध करें कि :

$$\varepsilon_{ijk} A_j A_k = 0 \text{ है ; जहाँ } A_j \text{ एक सदिश है।}$$

- (d) समुच्चय $G = \{x, y, z, \dots\}$ के समूह कहलाने के लिए उसके अवयव किन गुणधर्मों को संतुष्ट करते हैं?
- (e) सिद्ध करें कि :
 $f(z) = z - z^*$ एक विश्लेषिक फलन नहीं है।
- (f) फलन $f(z) = \frac{ze^z}{(z-a)^2}$ की विचित्रता का निर्धारण करें और उसका प्रकार बताएँ।
- (g) फलन $a + be^{ct}$ का लाप्लास रूपांतर परिकलित करें।
- (h) किसी फलन के फूरिये रूपांतर की परिभाषा दें। इस परिभाषा का उपयोग कर, सम फलनों के लिए फूरिये रूपांतर का व्यंजक प्राप्त करें।

2. कोई दो भाग करें :

- (a) समीकरण $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 12$ के गुणांकों का आव्यूह लिखिए। इसके आइगेन मान परिकलित करें और विकर्ण आव्यूह का उपयोग करके समीकरण को नए चरों में लिखें। 5
- (b) कोटि दो वाले सममित और प्रतिसममित टेन्सरों की परिभाषा लिखें। सिद्ध करें कि एक सममित टेन्सर A_{ij} निर्देशांक रूपांतरणों के अधीन सममित रहता है। 5
- (c) सिद्ध करें कि गुणन के अधीन 1 के घनमूल, चक्रीय समूह बनाते हैं। 5

3. कोई दो भाग करें :

(a) निम्नलिखित समाकल का परिकलन करें :

5

$$\oint_c \frac{e^z}{z^2 - a^2} dz \text{ जहाँ } c \text{ वृत्त } |z| > a \text{ है।}$$

(b) निम्नलिखित समाकल का मान परिकलन करें :

5

$$\int_0^\infty \frac{2 dx}{x^2 + 1}.$$

(c) $z=2$ के प्रति $f(z) = \frac{1}{z-a}$ का टेलर श्रेणी प्रसार

5

प्राप्त करें।

4. कोई एक भाग करें :

(a) फलन $f(x) = e^{-a|x|}$ का फूरिये रूपांतर प्राप्त करें।

10

(b) लाप्लास रूपांतर विधि लागू करके निम्नलिखित आदि

10

मान अवकल समीकरण को हल करें :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4 y = 4$$

जबकि $y(0) = 0, y'(0) = -2$ है।

5. कोई एक भाग करें :

(a) धन पूर्णांक n के लिए बेसल फलन :

10

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

का उपयोग कर निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध स्थापित करें :

$$\frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) = J_{n-1}(x)$$

(b) $f(x) = x^2$ का प्रसार $\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x)$ के रूप की

5+5

श्रेणी में कीजिए। अतएव, निम्नलिखित समाकल का परिकलन करें :

$$\int_{-1}^1 x^2 P_n(x) dx.$$
