

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2011

MATHEMATICS

MTE-9 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

Note : Attempt five questions in all. Question No. 1 is compulsory. Do any four questions out of the Questions No. 2 to 7.

1. Are the following statements True or False ? Give 10 reasons for your answers.
- (a) The function $f(x) = x^2 + |x|$ is differentiable at $x = -1$.
- (b) Every sub sequence of the sequence $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ is convergent.
- (c) Every infinite set is an open set
- (d) On the curve $y = x^2 + x + 1$, the chord joining the points whose abscissae are $x = 2$, $x = 4$ is parallel to the tangent to the curve at the point whose abscissa is $x = 3$.
- (e) A necessary condition for the function f to be integrable is that it is continuous.

2. (a) Prove that every strictly increasing onto function is invertible. 2
- (b) Show that the sequence $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ is convergent 3
where (a_n) is a bounded sequence.
- (c) Prove that the sequence $(f_n(x))$ where 5
 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ is not uniformly
convergent in $[-1, 1]$
3. (a) Show that the set $Z = \{x : x \text{ is an integer}\}$ is a 3
closed set.
- (b) Check whether the function $f(x) = \sin x + \cos x$ 3
has an extreme value in the interval
 $[\pi, 2\pi]$.
- (c) Evaluate $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^x$ 4
4. (a) Obtain the value of x for which the series 6
$$\sum \frac{1.3.5 \dots (4n-3)}{2.4.6 \dots (4n-2)} \cdot \frac{x^{2n}}{4n} \quad (x > 0)$$

is convergent.
- (b) Use the principle of mathematical induction 4
to show that $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$
 $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, n being natural number.

5. (a) Prove that the function f defined by 4

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{when } x \text{ is rational} \\ -1, & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is discontinuous at every point in \mathbf{R} .

- (b) Prove that 4

$$\frac{x^2}{2(1+x)} < x - \log(1+x) < \frac{x^2}{2} \quad (x < 0)$$

- (c) Prove that the function f defined on $[0, 1]$ by 2

$$f(x) = \begin{cases} 2nx & \text{when } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n=1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{when } x=0 \end{cases}$$

is integrable on $[0, 1]$

6. (a) Let f and F be two real-valued functions 5
defined on closed interval $[a, b]$ such that f
is Riemann integrable, F is differentiable
and $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$. Show that

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- (b) Prove that between any two real roots of 3
 $\sin x = e^{-2x}$, there is at least one root of
 $\cos x + 2e^{-2x} = 0$.
- (c) Show that the function $f(x) = |\sin x|$ is a 2
periodic function with period π .

7. (a) Test the conditional convergence of the series $1 - \frac{1}{2^{2/3}} + \frac{1}{3^{2/3}} - \frac{1}{4^{2/3}} + \dots$ 4

(b) Use integral test, to test the convergence of the series 3

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^2}$$

(c) State Bolzano-Weierstrass Theorem for sets. Apply this theorem to find out whether the set $\left\{ \frac{1}{n} : n \text{ is a natural number} \right\}$ has a limit point. 3

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2011

गणित

एम.टी.ई.-9 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : कुल पाँच प्रश्न कीजिए। प्रश्न सं. 1 अनिवार्य हैं। प्रश्न सं 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य? अपने उत्तरों के कारण बताइए। 10
 - (a) फलन $f(x) = x^2 + |x|$ $x = -1$ पर अवकलनीय है।
 - (b) अनुक्रम $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ का प्रत्येक उप-अनुक्रम अभिसारी है।
 - (c) प्रत्येक अपरिमित समुच्चय एक विवृत समुच्चय है।
 - (d) वक्र $y = x^2 + x + 1$ पर बिन्दुओं को जिनके भुज $x = 2, x = 4$ हैं, मिलाने वाली जीवा उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा के समानांतर होती है जिसका भुज $x = 3$ होता है।
 - (e) फलन f के समाकलनीय होने के लिए अनिवार्य प्रतिबंध है कि वह संतत हो।

2. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक निरंतर वर्धमान आच्छादी फलन व्युत्क्रमणीय होता है। 2
- (b) दिखाइए कि अनुक्रम $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ अभिसारी है, जहाँ (a_n) एक परिवर्द्ध अनुक्रम है। 3
- (c) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $(f_n(x))$ जहाँ 5

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

 $[-1, 1]$ में एकसमानतः अभिसारी नहीं है।
3. (a) दिखाइए कि समुच्चय $Z = \{x : x \text{ एक पूर्णांक है}\}$ एक 3
संवृत समुच्चय है।
- (b) जाँच कीजिए कि फलन $f(x) = \sin x + \cos x$ का 3
अन्तराल $[\pi, 2\pi]$ में चरम मान होता है या नहीं।
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^x$ ज्ञात कीजिए। 4
4. (a) x का वह मान प्राप्त कीजिए जिसके लिए श्रेणी 6

$$\sum \frac{1.3.5. \dots (4n-3)}{2.4.6. \dots (4n-2)} \cdot \frac{x^{2n}}{4n} \quad (x > 0)$$

अभिसारी है।
- (b) गणितीय आगमन नियम द्वारा दिखाइए कि 4

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

जहाँ n प्राकृतिक संख्या है।

5. (a) सिद्ध कीजिए कि 4

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{जहाँ } x \text{ परिमेय है} \\ -1, & \text{जहाँ } x \text{ परिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ में प्रत्येक बिंदू पर असंतत है .

- (b) सिद्ध कीजिए कि 4

$$\frac{x^2}{2(1+x)} < x - \log(1+x) < \frac{x^2}{2} \quad (x < 0)$$

- (c) सिद्ध कीजिए कि $[0, 1]$ पर 2

$$f(x) = \begin{cases} 2nx & \text{जब } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n=1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{जब } x=0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ पर समाकलनीय है।

6. (a) मान लीजिए f and F संवृत अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित 5

दो ऐसे वास्तविक-मान फलन हैं जिससे कि f रीमान समकलनीय है, F अवकलनीय है और

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

$$\text{दिखाइए कि } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

- (b) सिद्ध कीजिए कि $\sin x = e^{-2x}$, के किन्हीं दो वास्तविक 3

मूलों के बीच, $\cos x + 2e^{-2x} = 0$ का कम से कम एक मूल होता है।

- (c) दिखाइए कि फलन $f(x) = |\sin x|$ आवर्तनांक π वाला 2
आवर्ती फलन है।

7. (a) श्रेणी $1 - \frac{1}{2^{2/3}} + \frac{1}{3^{2/3}} - \frac{1}{4^{2/3}} + \dots$ के 4

प्रतिबंध अभिसरण की जाँच कीजिए।

(b) समाकल परीक्षण द्वारा श्रेणी $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^2}$ के 3

अभिसरण की जाँच कीजिए।

(c) समुच्चों के लिए बुलजानों- वाइएस्ट्रम प्रमेय का कथन 3
दीजिए। इस प्रमेय का प्रयोग करके पता लगाइए कि

set $\left\{ \frac{1}{n} : n \text{ is a natural number} \right\}$ का सिमा बिन्दु

है या नहीं।
