MTE-8

01495

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-8 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours | *Maximum Marks : 50*
(Weightage 70%)

Note : *Q. No.* ***1*** *is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions out of the remaining questions Nos.* ***2 - 7****. Calculators are* ***not*** *allowed.*

---

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answer with the help of a short proof or a counter example. **2x5=10**

   (a) The differential equation of all lines at a unit distance from the origin, namely, $y = \mathrm{m} + \sqrt{1+\mathrm{m}^2}$, where m is a parameter, is

   $$(x^2-1)\,(y')^2 - 2xy\,y' + y^2 = 0.$$

   (b) The differential equation

   $$\left(x \sin \frac{y}{x}\right) dy - \left(y \cos \frac{y}{x} - x\right) dx = 0$$

   is homogeneous and has the primitive

   $$x = \mathrm{C} \exp\left(\cos \frac{y}{x}\right).$$

(c) The integral of the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^{6x}$$

is $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10} = e^{6x}$

(d) The primitive of differential equation $2x(y+z)\ dx + (2yz - x^2 + y^2 - z^2)\ dy + (2yz - x^2 - y^2 + z^2)\ dz = 0$ is $x^2 + y^2 + z^2 = C\ (x+y+z)$

(e) The integral curves of the equations

$$\frac{p\,dx}{(q-r)\ yz} = \frac{q\,dy}{(r-p)\ xz} = \frac{r\,dz}{(p-q)\ xy}$$

where p, q, r are prescribed real numbers, are given by

$$px^2 + qy^2 + rz^2 = C1$$
$$p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 = C2$$

2. (a) Solve the equation $(2x+3y+4)\ dx + (3x+4y+5)\ dy = 0.$ 3

(b) Solve the equation $(D^2 - 4\ D + 4)\ y = x^3$ 3

$e^{2x} + xe^{2x}$, $\left(D \equiv \frac{d}{dx}\right)$.

(c) Find the solution surface of the equation 4

$4yzp + q + 2y = 0$ $\left(p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}, q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, passing through $y^2 + z^2 = 1,\ x + z = 2.$

3. (a) Using the method of variation of parameters, solve : 3

$(D^2 - 1)\ y = e^x \sin 2x,$

$\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(D \equiv \frac{d}{dx}\right)$,

(b) Solve the equation 3

$(1 - xy + x^2y^2)\ dx + (x^3y - x^2)\ dy = 0,\ x>0.$

(c) Solve the equation 4

$(D_x - 2\ D_y)^2\ (D_x + 3\ D_y)\ z = e^{2x+y},$

where $D_x z \equiv \frac{\partial z}{\partial x},\ D_y z \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$.

4. (a) Solve the equation 3

$$(x^4 + y^4)\ dx - xy^3 dy = 0,\ x > 0.$$

(b) Using the transformation $x = \frac{1}{t}$, reduce the differential equation 3

$$y = x^4 p^2 - xp,\ \left(p \equiv \frac{dy}{dx}\right),$$

to a differential equation of the clairant's form Hence solve it.

(c) Solve the equation $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = 3 - 2x.$ 4

5. (a) By changing the independent variable, solve the equation. 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^4}\ y = \frac{2x^2+1}{x^6}.$$

(b) Show that the solution of the Laplace equation 6

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ (-1 \le x \le 1,\ y \ge 0)$, which satisfies the conditions :

(i) $u \to 0$ as $y \to \infty$, $(-1 \le x \le 1)$,

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ when $x = \pm 1$, $(y \geqslant 0)$,

(iii) $u(x, 0) = \begin{cases} -T_0 \text{ for } -1 \le x < 0, \\ T_0 \text{ for } 0 < x \le 1, \\ 0 \text{ for } x = 0, \end{cases}$

is given by

$$u(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2n+1}$$

$$\exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi y\right] \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right].$$

6. (a) Using Jacobi's method solve the equation $u_x^2 + u_y^2 + u_z = 1$. 3

(b) Show that the partial differential equations $p^2 + q^2 - 1 = 0$ and $(p^2 + q^2)\, x - pz = 0$ are compatible. 3

(c) Solve the equation $(3D^2 - 2\, D'^2 + D - 1)\, z = 4\, e^{x+y} \cos(x+y)$. 4

7. (a) Solve the equation 5

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x}{1-x^2}\right) y = x\sqrt{y},\ y(0) = 1$$

(b) Write the following equation as Euler's equation and then solve it 5
$x^4 y''' + 2x^3 y'' - x^2 y' + xy = x^2 + 1$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-8 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1 **अनिवार्य** है। प्रश्न संख्या 2 से 7 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **2x5=10**

(a) मूल बिन्दु से एकक दूरी पर लगी रेखाओं अर्थात, $y=\mathrm{m}+\sqrt{1+\mathrm{m}^2}$, जहाँ m एक प्राचल है, का अवकल समीकरण :

$(x^2-1)\,(y')^2-2xy\,y'+y^2=0$ है।

(b) अवकल समीकरण :

$$\left(x \sin \frac{y}{x}\right) dy - \left(y \cos \frac{y}{x} - x\right) dx=0$$

समघात है और इसका पूर्वग $x=C\exp\left(\cos \frac{y}{x}\right)$ है।

(c) अवकल समीकरण

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\,\frac{dy}{dx} + 2y = e^{6x} \text{ का} \qquad \text{समाकल।}$$

$y = C_1\, e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10} = e^{6x}$ है।

(d) अवकल समीकरण :
$2x(y+z)\ dx\ + (2yz - x^2 + y^2 - z^2)$
$dy\ +\ (2yz - x^2 - y^2 + z^2)\ dz\ =\ 0$ का पूर्वग
$x^2 + y^2 + z^2 = C\ (x+y+z)$ है।

(e) समीकरणों :

$$\frac{p\,dx}{(q-r)\ yz} = \frac{q\,dy}{(r-p)\ xz} = \frac{r\,dz}{(p-q)\ xy}$$

के समाकल
वक्र, जहाँ p, q, r निर्धारित वास्तविक संख्याएँ है,
$px^2 + qy^2 + rz^2 = C1$
$p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 = C_2$ द्वारा परिभाषित हैं।

2. (a) समीकरण **3**
$(2x+3y+4)\ dx + (3x+4y+5)\ dy = 0$ को हल कीजिए।

(b) समीकरण $(D^2 - 4\ D + 4)\ y = x^3\ e^{2x} + xe^{2x}$, **3**

$\left(D \equiv \frac{d}{dx}\right)$ को हल कीजिए।

(c) $y^2 + z^2 = 1,\ x + z = 2$ से गुज़रने वाले समीकरण **4**

$4yzp + q + 2y = 0\ \left(p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}, q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ का हल

पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

3. (a) प्राचल विचरण विधि से निम्नलिखित को हल कीजिए : **3**
$(D^2 - 1)\ y = e^x \sin 2x$,

$\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\mathrm{D} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$,

(b) समीकरण **3**

$(1 - xy + x^2y^2)\ \mathrm{d}x + (x^3y - x^2)\ \mathrm{d}y = 0,\ x > 0.$

को हल कीजिए।

(c) समीकरण **4**

$(\mathrm{D}_x - 2\ \mathrm{D}_y)^2\ (\mathrm{D}_x + 3\ \mathrm{D}_y)\ z = \mathrm{e}^{2x+y}$

को हल कीजिए जहाँ $\mathrm{D}_x z \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$, $\mathrm{D}_y z \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$.

4. (a) समीकरण **3**

$(x^4 + y^4)\ \mathrm{d}x - xy^3 \mathrm{d}y = 0,\ x > 0$ को हल कीजिए।

(b) रूपांतरण $x = \frac{1}{\mathrm{t}}$ से अवकल समीकरण **3**

$y = x^4 \mathrm{p}^2 - x\mathrm{p},\ \left(\mathrm{p} \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ को क्लेरेट रूप के अवकल समीकरण में समानीत कीजिए। इस तरह इसे हल कीजिए।

(c) समीकरण $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y = 3 - 2x$ को हल कीजिए। **4**

5. (a) स्वतंत्र चर परिवर्तन विधि से समीकरण को हल कीजिए। **4**

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x^4}\ y = \frac{2x^2 + 1}{x^6}.$$

(b) दिखाइए कि लाप्लास समीकरण **6**

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ (-1 \leq x \leq 1, y \geq 0)$ का हल जो

निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है :

(i) $u \to 0$ के रूप में $y \to \infty$, $(-1 \leq x \leq 1)$,

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ जब $x = \pm 1$, $(y \geqslant 0)$,

(iii) $u(x, 0) = \begin{cases} -T_0 \text{ for } -1 \leq x < 0 & \text{के लिए,} \\ T_0 \text{ for } 0 < x \leq 1 & \text{के लिए,} \\ 0 \text{ for } x = 0 & \text{के लिए,} \end{cases}$

निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है :

$$u(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2n+1}$$

$$\exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi y\right] \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right].$$

6. (a) जैकोबी विधि से समीकरण $u_x^2 + u_y^2 + u_z = 1$ को हल कीजिए। 3

(b) दिखाइए कि आंशिक अवकल समीकरण $p^2 + q^2 - 1 = 0$ और $(p^2 + q^2)\, x - pz = 0$ सुसंगत हैं। 3

(c) समीकरण 4

$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)\, z = 4e^{x+y} \cos(x+y)$ को हल कीजिए।

7. (a) समीकरण 5

$\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{x}{1-x^2}\right) y = x\sqrt{y}$, $y(0) = 1$ को हल कीजिए।

(b) निम्नलिखित समीकरण को आयलर समीकरण के रूप में लिखिए और फिर इसे हल कीजिए : 5

$x^4 y''' + 2x^3 y'' - x^2 y' + xy = x^2 + 1.$