

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME**Term-End Examination****December, 2011****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS****MTE-7 : ADVANCED CALCULUS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50*

Note : Question No. 1 is compulsory. Attempt any four questions from the remaining questions. Calculators are not allowed.

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answer. **10**

(a) If $f(x, y) = xy$ on a circle C , then $\int_C xy \, dx$ exists but $\int_C xy \, dy$ does not.

(b) $(\ln x)^{\frac{1}{x-1}}$ is in the 1^∞ form as $x \rightarrow 1$.

(c) $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ and $g(x, y) = x^2 + y^2$ have the same set of level curves.

(d) The Jacobian of $w = 2x + y$, $z = 3x - y$ at $(10, -6)$ is 5.

(e) If $f(x, y) = \sin\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$, then $xf_x + yf_y = 0$.

2. (a) If $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ 4
 $= 0$, $(x, y) = (0, 0)$
 find the two repeated limits of $f(x, y)$ as $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Also find the simultaneous limit, if it exists.
- (b) Using triple integrals, find the volume of the tetrahedron bounded by the plane 6
 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ and the coordinate planes.
 Draw a sketch.
3. (a) Identify homogeneous functions from those given below, give their degrees and verify Euler's theorem. 6
- (i) $\frac{\cos x}{\cos y}$
- (ii) $x^{-2/3} y^{5/3}$
- (iii) $e^{x/y}$
- (b) Is $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x + x^2}$ an indeterminate form 4
 as $x \rightarrow 0$? Find $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, if possible.
4. (a) Locate and classify the stationary points of 5
 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

- (b) Verify the following for $x=3$ and $y=10$, 3
 $|2x - 3y - 5| \leq |2x - 3| + |3y + 2|$

Is this inequality true for all values of x and y . Justify your answer.

- (c) Let $x = e_1 - e_2 + 2e_3$, $y = 2e_1 + e_2 - e_3$, where 2
 e_1, e_2, e_3 are the unit vectors. Find $|x|$ and $|y|$.

5. (a) If $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ 5

$$= 0, \quad (x, y) = (0, 0)$$

show that $f_x(0, 0)$ and $f_y(0, 0)$ exist. Is f differentiable at $(0, 0)$? Justify your answer.

- (b) Draw a rough sketch of the region of 5

integration and evaluate $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy dx$

by changing the order of integration.

6. (a) Show that the following pairs of functions 3
are functionally dependent :

$$f(x, y) = e^{x-y}, \quad g(x, y) = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y}$$

- (b) Evaluate : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x - 3}{3e^x - 2}$ 2

- (c) Find an approximation to the function 5
 $f(x, y) = e^y \sin x$ by a second degree polynomial near $(0, 0)$.

7. (a) Calculate the work done by the force $F = (-4xy, 8y)$ in moving a particle along $y = x^2$ from $(0, 0)$ to $(2, 4)$. 5

(b) Define a locally invertible function and determine whether the following map is locally invertible at $(2, 0, \pi/2)$. 5

$$F(x, y, z) = (2x + 3y + 4z, e^x \cos z, e^x \sin z)$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसंबर, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-7 : उच्च फलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : प्रश्न संख्या 1 करना जरूरी है। शेष प्रश्नों में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिए। कैलक्युलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित कथनों में कौन-कौन कथन सत्य या असत्य हैं? 10
अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(a) यदि एक वृत्त C पर $f(x, y) = xy$ तो $\int_C xy \, dx$ का

अस्तित्व होता है, परन्तु $\int_C xy \, dy$ का अस्तित्व नहीं होता।

(b) $(\ln x)^{\frac{1}{x-1}}$, 1^∞ के रूप में होता है जबकि $x \rightarrow 1$.

(c) $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ और $g(x, y) = x^2 + y^2$ के स्तर वक्रों के समान समुच्चय होते हैं।

(d) $(10, -6)$ पर $w = 2x + y, z = 3x - y$ का याकूबी 5 होता है।

(e) यदि $f(x, y) = \sin \left(\frac{x + y}{x - y} \right)$, तो $xf_x + yf_y = 0$.

2. (a) यदि $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ 4
 $= 0$, $(x, y) = (0, 0)$

$f(x, y)$ की दो पुनरावृत्त सीमाएँ ज्ञात कीजिए, जबकि $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. उस स्थिति में इसकी युग्मत सीमा भी ज्ञात कीजिए। जबकि इसका अस्तित्व होता हो।

(b) त्रिक समाकलों की सहायता से समतल 6

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \text{ और निर्देशांक समतलों से परिबद्ध}$$

चतुष्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए। एक स्केच भी बनाइये।

3. (a) नीचे दिए गए फलनों में बताइए कि कौन-कौन फलन 6
समघात फलन हैं। इन फलनों के घात बताइए और
ऑयलर-प्रमेय सत्यापित कीजिए :

(i) $\frac{\cos x}{\cos y}$

(ii) $x^{-2/3} y^{5/3}$

(iii) $e^{x/y}$

(b) क्या $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x + x^2}$ एक अनिर्धार्य रूप होता है? 4

जबकि $x \rightarrow 0$. यदि संभव हो, तो $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ज्ञात कीजिए।

4. (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ के स्तब्ध बिन्दु ज्ञात कीजिए और उनका वर्गीकरण कीजिए। 5
- (b) $x=3$ और $y=10$ के लिए यह सत्यापित कीजिए कि $|2x - 3y - 5| \leq |2x - 3| + |3y + 2|$ क्या यह असमिका, x और y के सभी मानों के लिए सत्य है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3
- (c) मान लीजिए $x = e_1 - e_2 + 2e_3$, $y = 2e_1 + e_2 - e_3$, जहाँ e_1, e_2, e_3 एकक सदिश हैं। $|x|$ और $|y|$ ज्ञात कीजिए। 2

5. (a) यदि $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ 5
 $= 0$, $(x, y) = (0, 0)$

तो दिखाइए कि $f_x(0, 0)$ और $f_y(0, 0)$ का अस्तित्व होता है। क्या $(0, 0)$ पर f अवकलनीय है? अपने उत्तर को पुष्टि कीजिए।

- (b) समाकलन प्रदेश का एक स्थूल स्केच बनाइए और समाकलन क्रम में परिवर्तन करके 5

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1 + y^3} dy dx \text{ का मान निकालिए।}$$

6. (a) दिखाइए कि निम्नलिखित फलन-युग्म फलनतः आश्रित है: 3

$$f(x, y) = e^{x-y}, g(x, y) = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y}$$

- (b) मान निकालिए। $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x - 3}{3e^x - 2}$ 2

- (c) $(0, 0)$ के निकट एक द्वितीय घात बहुपद से फलन $f(x, y) = e^y \sin x$ का एक सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 5
7. (a) $(0, 0)$ से $(2, 4)$ तक $y = x^2$ के अनुदिश एक कण को गतिमान करने में बल $F = (-4xy, 8y)$ द्वारा किया गया कार्य परिकलित कीजिए। 5
- (b) एक स्थानतः व्युत्क्रमणीय फलन परिभाषित कीजिए कि निम्नलिखित प्रति चित्र $(2, 0, \pi/2)$ पर स्थानतः व्युत्क्रमणीय है या नहीं। 5
- $F(x, y, z) = (2x + 3y + 4z, e^x \cos z, e^x \sin z)$
-