No. of Printed Pages : 8

MTE-6

00542

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-6 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt Five questions in all. Question No. 7 is* ***compulsory.*** *Answer* ***any four*** *questions from the rest. calculator are not allowed.*

---

1. (a) Form an operation table of $G = \{\overline{5}, \overline{15}, \overline{25}, \overline{35}\}$ under multiplication mod (40). Check whether or not G is a group. **4**

(b) The map $\phi : R\,[x] \to M_3(R)$ is defined by **4**

$$\phi\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_n x^n) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Show that ϕ is a ring hemomorphism. Determine Ker ϕ also.

(c) Check whether $Z \times Z$ is a PID or not. **2**

2. (a) Show that $<x>$ is not a maximal ideal in $z[x]$. 2

(b) List all the subgroups of Z_{18}, along with their generators. 3

(c) Let $H = <(1\ 2)>$ and $k = <(1\ 2\ 3)>$ be subgroups of S_3. Show that $S_3 = Hk$. Is S3 an internal direct product of H and k ? Justify your answer. 3

(d) Check whether or not { (2, 5), (1, 3), (5, 2), (3, 1) } is an equivalence relation on { 1, 2, 3, 5 }. 2

3. (a) Show that any group of order 35 is cyclic. 5

(b) Use the Eisenstein's criterion for irreduciblity of a polynomial over $z\,[x]$ to test whether $8x^3 + 6x^2 - 9x + 24$ is irreducible over $z\,[x]$ or not. Also obtain the quotient field of 3

$$Q\,[x]/\langle\, 8x^3 + 6x^2 - 9x + 24 \,\rangle$$

(c) Let R be a ring and let $a \in R$ be such that $a^2 = 1$. Let $S = \{ara \mid r \in R\}$. Show that S is a sub ring of R. 2

4. (a) Show that $z\left[\sqrt{-13}\right]$ is not a UFD, by giving, with justification, two different factorisation of 49 into irreducible elements. 5

(b) Check whether S is a subring of R in each of the following cases : **5**

(i) $S = \{ a/b \in Q \mid b$ is not divisible by $3\}$, $R = Q$.

(ii) S is the set of functions which are linear combinations of the functions $Id, \cos nt, \sin nt, n \in Z$, and $R = \{f : R \to R\}$.

5. (a) Show that $f : (R^+, x) \to (R, +)$, defined by $f(a) = \log_{10} a$, is an isomorphism of groups, where R^+ is the set of positive real numbers. **4**

(b) Give an example of a ring R such that $a^2 = a$ for all $a \in R$. Show that any such ring is commutative. **3**

(c) Let $(C^*, .)$ denote the group of non-zero complex numbers and let $S = \{z \in c^x \mid |z| = 1\}$. **3**

Show that $C^*/S \simeq R^+$, where $(R^+, .)$ is the group of positive real numbers.

6. (a) Show that a permutation is even if and only if its signature is + 1. Find the signature of $(2\ 3\ 4) \in S_4$ using the definition of signature. **4**

(b) Show that, in a finite commutative ring, every non-zero element is either a zero divisor or a unit. Also find the number of zero divisors of Z_{20}. **6**

7. Which of the following statements are true ? Give reasons for your answer. 10

(a) The characteristic of the ring $Z_m \times Z_n$ under component wise addition and multiplication is the g.c.d. of m and n.

(b) The set $\left\{\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \middle| a \in Q, a \neq 0\right\}$ has no identity with respect to the binary operation of multiplication of 2×2 matrices.

(c) Any sub ring of a ring is an ideal.

(d) If a and b are elements of G with $0(a) = 2$ and $0(b) = 3$, then $0(ab) = 6$.

(e) There is no onto homomorphism from $Z_{15} \to Z$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.- 6 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। प्रश्न 7 **(सात) करना ज़रूरी** है। शेष में से कोई **चार** प्रश्न कीजिए। कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. (a) $G = \{\overline{5}, \overline{15}, \overline{25}, \overline{35}\}$ की गुणन mod (40) (यानि मोड्यूलो (40))के सापेक्ष एक संक्रिया सारणी बनाइए। जाँच कीजिए कि G एक समूह है या नहीं। **4**

(b) दर्शाइए कि **4**

$$\phi\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

द्वारा परिभाषित फलन $\phi : R\,[x] \to M_3(R)$ एक वलय समाकारिता है। Ker ϕ भी ज्ञात कीजिए।

(c) जाँच कीजिए कि क्या $Z \times Z$ एक PID है या नहीं। **2**

2. (a) दर्शाइए कि $<x>$, $z[x]$ में एक उच्चिष्ठ गुणजावली नहीं है। 2

(b) Z_{18} के सभी उपसमूहों की, उनके जनकों के साथ, एक सूची बनाइए। 3

(c) मानलीजिए कि S_3 के $H=<(1\ 2)>$ और $k=<(1\ 2\ 3)>$ उपसमूह हैं। दर्शाइए कि $S_3=Hk$. क्या S_3, H और k का आंतरिक अनुलोम गुणनफल है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(d) जाँच कीजिए कि { 1, 2, 3, 5 } पर (2, 5), (1, 3), (5, 2), (3, 1) } एक तुल्यता संबंध है या नहीं। 2

3. (a) दर्शाइए कि कोटि 35 वाला कोई भी समूह चक्रीय होता है। 5

(b) $z\ [x]$ पर किसी बहुपद की अखंडनीयता के लिए आइसनस्टाइन के निकष का प्रयोग करते हुए, जाँच कीजिए कि क्या $z[x]$ पर $8x^3+6x^2-9x+24$ अखंडनीय है या नहीं। 3

$Q\ [x]\langle\ 8x^3+6x^2-9x+24\ \rangle$ का भागफल क्षेत्र मालूम कीजिए।

(c) मान लीजिए कि R एक वलय है तथा $a \in R$ इस प्रकार है कि $a^2=1$. मान लीजिए कि $S=\{ara \mid r \in R\}$ दर्शाइए कि S, R की एक उपवलय है। 2

4. (a) पुष्टि के साथ, 49 के अखंडनीय अवयवों वाले दो अलग-अलग गुणनखंडन देते हुए, दर्शाइए कि $z\left[\sqrt{-13}\right]$ एक UFD नहीं है। 5

(b) जाँच कीजिए कि क्या निम्न में से प्रत्येक स्थिति में S, R का एक उपवलय है या नहीं : 5

(i) $S = \{ a/b \in Q \mid b$ 3 से विभाज्य नहीं है $\}$, $R = Q$.

(ii) S ऐसे फलनों का समुच्चय है जो $n \in Z$, के लिए फलनों Id, cos nt, sin nt के रैखिक संयोजन हैं, तथा $R = \{f : R \to R\}$.

5. (a) दर्शाइए कि $f(a) = \log_{10} a$ द्वारा परिभाषित $f : (R^+, x) \to (R, +)$ समूहों की एक तुल्याकारिता है, जहाँ R^+ घनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। 4

(b) ऐसे वलय R का एक उदाहरण दीजिए कि जिसके लिए सभी $a \in R$ के लिए $a^2 = a$ हो। दर्शाइए कि ऐसा कोई भी वलय क्रमविनिमेय होगा। 3

(c) मान लीजिए कि $(C^*, .)$ शून्येतर सम्मिश्र संख्याओं का समूह व्यक्त करता है तथा मान लीजिए कि 3

$S = \{z \in c^x \mid |z| = 1\}$. दर्शाइए कि $C^*/S \simeq R^+$ है, जहाँ $\left(R^+, .\right)$ घनात्मक वास्तविक संख्याओं का समूह है।

6. (a) दर्शाइए कि एक क्रमचय तभी और केवल तभी सम होता है जब उसका चिह्नक + 1 हो। चिह्नक की परिभाषा का प्रयोग करते हुए, $(2\ 3\ 4) \in S_4$ का चिह्नक ज्ञात कीजिए। 4

(b) दर्शाइए कि एक परिमित क्रमविनिमेय वलय में, प्रत्येक शून्येतर अवयव या एक शून्य का भाजक होता है या एक इकाई होता है। Z_{20} के शून्य के भाजकों की संख्या भी ज्ञात कीजिए। 6

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए। 10

(a) संगत घटकों के योग और गुणन के सापेक्ष वलय $Z_m \times Z_n$ का अभिलक्षणिक m और n का g.c.d. (महत्तम सार्व भाजक) है।

(b) समुच्चय $\left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in Q, a \neq 0 \right\}$ का 2×2 आव्यूहों के गुणन की द्विआधारी संक्रिया के कोई तत्समक अवयव नहीं है।

(c) किसी भी वलय का उपवलय एक गुणजावली होती है।

(d) यदि a और b, G के $0(a) = 2$ और $0(b) = 3$, के साथ अवयव हैं, तो $0(ab) = 6$ है।

(e) Z_{15} से Z तक कोई आच्छादक समाकारित नहीं है।