

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

04122

Term-End Examination

December, 2011

MATHEMATICS

MTE-4 : ELEMENTARY ALGEBRA

Time : 1½ hours

Maximum Marks : 25

Instructions :

1. Students registered for both MTE-4 & MTE-5 courses should answer both the question papers in two separate answer books entering their enrolment number, course code and course title clearly on both the answer books.
2. Students who have registered for MTE-4 or MTE-5 should answer the relevant question paper after entering their enrolment number, course code and course title on the answer book.

Note : Question No. 1 is *compulsory*. Attempt *any three* questions from questions *no. 2* to 5. Calculators are *not* allowed.

1. Decide which of the following are true or false. 10
If true, furnish the proof, and if false, give a counter example.
 - (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ for any subsets A, B, C of a set U.
 - (b) $|\bar{z}_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2|$ for any two complex numbers z_1 and z_2 , where $|z|$ denotes the absolute value (or modulus) of z .

(c) A linear equation with coefficients in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ in one unknown can have a root which is real.

(d) The system of equations

$$4x + 6y = 9$$

$$6x + 9y = 13$$

is inconsistent.

(e) For a 3×3 matrix A

$$\det(\alpha A) = \alpha^3 (\det A)$$

holds for every scalar α where $\det A$ denotes the determinant of A .

2. (a) Prove that $(ax + by)(ay + bx) \geq 4abxy$ where a, b, x, y are positive real numbers. 2

(b) Find all the four complex fourth roots of (-1) . Show that these roots are in G.P. 3

3. (a) If $y = \alpha + \beta$ is a solution of the cubic equation $y^3 = 4y + B = 0$ such that $3\alpha\beta = -A$, find the quadratic equation having α^3 and β^3 as roots. 3

(b) Without Expanding the determinant 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ find its value.}$$

4. (a) Prove that $A \cup (A \cap B) = A$ for any two subsets A and B of a set U. 2
- (b) Check if the following system of equations can be solved by cramer's rule. If it can be solved, then apply the rule for solving the system ; otherwise solve it by the Gaussian elimination method. 3

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + 3z = 6.$$

5. (a) Show that $2^{2n} - 3n - 1$ is divisible by 9 using the principle of mathematical induction. 2
- (b) Find the greatest value of $(3 - x)^5 (2 + x)^6$, for $-2 < x < 3$. 3
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2011

गणित

एम.टी.ई.-4 : प्रारंभिक बीजगणित

समय : 1½ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

निर्देश :

1. जो छात्र एम.टी.ई.-4 और एम.टी.ई.-5 दोनों पाठ्यक्रमों के लिए पंजीकृत हैं, दोनों प्रश्नपत्रों के उत्तर अलग-अलग उत्तर पुस्तिकाओं में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।
2. जो छात्र एम.टी.ई.-4 या एम.टी.ई.-5 किसी एक के लिए पंजीकृत हैं, अपने उसी प्रश्नपत्र के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।

नोट : प्रश्न सं 1 करना जरूरी है। प्रश्न सं 2 से 5 में से कोई तीन के उत्तर लिखिये। कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. बताइये निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य और कौन से कथन असत्य हैं। यदि सत्य हों तो उसकी उपपत्ति लिखिये, और असत्य हों तो प्रति-उदाहरण दीजिये:
 - (a) समच्चय U के प्रत्येक उपसमुच्चय A, B, C के लिये $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ होगा।
 - (b) यदि $|z|$ सम्मिश्र संख्या z का निरपेक्ष मान निरूपित करता हो तो $|\bar{z}_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2|$ प्रत्येक सम्मिश्र संख्या z_1, z_2 के लिये होगा।

(c) एक अज्ञात राशि में $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ पर गुणांक वाली रेखीय समीकरण का वास्तविक सम्मिश्र मूल हो सकता है।

(d) रेखीय समीकरण तंत्र $4x + 6y = 9$

$$6x + 9y = 13$$

का कोई हल नहीं है।

(e) 3×3 आव्यूह A तथा अदिश α के लिये

$\det(\alpha A) = \alpha(\det A)$ होता है, जब कि $\det A$, आव्यूह A का सारणिक है।

2. (a) सिद्ध कीजिए कि :

2

$(ax + by)(ay + bx) \geq 4abxy$ जबकि a, b, x, y धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं।

(b) (-1) के चारों सम्मिश्र चतुर्थ मूलों को ज्ञात कीजिये।

3

दर्शाइये कि ये मूल गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

3. (a) यदि $y = \alpha + \beta$ घन समीकरण $y^3 = 4y + B = 0$ का

3

ऐसा मूल हो जिसके लिये $3\alpha\beta = -A$, है, तो α^3 तथा β^3 जिसके मूल हों ऐसा वर्ग समीकरण ज्ञात कीजिये।

(b) सारणिक
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

2

का बिना विस्तार करते हुये मान ज्ञात कीजिये।

4. (a) समुच्चय U के किन्ही दोँ उपसमुच्चयों A और B के लिए 2
 $A \cup (A \cap B) = A$ को सिद्ध कीजिए
- (b) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय 3
को क्रैमर नियम से हल किया जा सकता है? यदि किया
जा सकता है, तो इसे क्रैमर नियम से हल कीजिए।
अन्यथा, इसे गाउसीय निराकरण विधि से हल कीजिए।
- $$x + y + z = 6$$
- $$x + 2y + 3z = 10$$
- $$x + 2y + 3z = 6.$$
5. (a) गणितीय आगमन के सिद्धान्त का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए 2
कि $2^{2n} - 3n - 1$, 9 से विभाजित होता है।
- (b) $-2 < x < 3$ के लिए $(3 - x)^5 (2 + x)^6$ का 3
अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।
-

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2011

MATHEMATICS

MTE-5 : ANALYTICAL GEOMETRY

Time : 1½ hours

Maximum Marks : 25

Note : Question no. 5 is compulsory. Answer any three questions from question no. 1 to 4. Calculators are *not* allowed.

1. (a) Find the Cartesian form of the equation $r = a(1 - \sin\theta)$ where a is a constant. 2
- (b) Find the equations of the planes which contain the line $7x + 10y - 30 = 0$, $5y - 3z = 0$ and touch the ellipsoid $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$. 3
2. (a) Find the equation to the plane passing through the point (1, 2, 3) and parallel to $6x - 5y + 3z = 0$. 2
- (b) Find the radius of the circle $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 2z = 0$, $2x + y + 2z = 1$. 3

3. (a) Obtain the equation of the cylinder whose axis is $2x=y=-z$ and radius is 3. 2
- (b) Find the centre of the conicoid $14x^2 + 14y^2 + 8z^2 - 4yz - 4zx - 8xy + 18x - 18y + 5 = 0$ what will be its new equation if the origin is shifted to the centre? 3
4. (a) Under what condition on k will $S + kS_1 = 0$ be a hyperbola where $S \equiv \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ and $S_1 \equiv xy - 15 = 0$? 2
- (b) The intersection with any plane parallel to the xy -plane of the paraboloid $x^2 + 2y^2 = 6z$ will be a conic. Identify the conic and give a rough sketch of it. 3
5. Are the following statements *true* or *false*? Give reasons for your answers. 10
- (a) Any two spheres intersect in four real points.
- (b) The point $(4, -3)$ lies inside the ellipse $5x^2 + 7y^2 = 11$.
- (c) At each point of a cone we can draw infinitely many tangents to the cone.

(d) The vertical cross-section of the hyperboloid of one sheet $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ by the plane $x = 0$ is a parabola.

(e) $\frac{x - 3}{7} = \frac{y - 5}{-2}$ represents a plane in 3-dimensional space.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2011

गणित

एम.टी.ई.-5 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : 1½ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

नोट : प्रश्न संख्या 5 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 4 में से कोई तीन प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (a) समीकरण $r = a(1 - \sin\theta)$ का कार्तीय रूप ज्ञात कीजिए, जहाँ a एक स्थिरांक है। 2
- (b) ऐसे समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें रेखांक $7x + 10y - 30 = 0$, $5y - 3z = 0$ स्थित हैं और जो दीर्घवृत्तज $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ को स्पर्श करते हैं। 3
2. (a) ऐसे समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $6x - 5y + 3z = 0$ के समांतर हो और बिंदू $(1, 2, 3)$ से गुजरने वाले हो। 2
- (b) वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 2z = 0$, $2x + y + 2z = 1$ का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए 3

3. (a) ऐसे बेलन का समीकरण प्राप्त कीजिए जिसका अक्ष $2x = y = -z$ और त्रिज्या 3 है। 2
- (b) शांकवज $14x^2 + 14y^2 + 8z^2 - 4yz - 4zx - 8xy + 18x - 18y + 5 = 0$ का केन्द्र ज्ञात कीजिए। इसका नया समीकरण क्या होगा जब मूलबिन्दु को केन्द्र पर स्थानांतरित किया जाएगा। 3
4. (a) k के किस प्रतिबंध के अधीन $S + kS_1 = 0$ अतिपरवलय $S \equiv \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ और $S_1 \equiv xy - 15 = 0$? 2
- (b) परवलय $x^2 + 2y^2 = 6z$ के xy -समतल के प्रति समांतर किसी भी समतल के साथ प्रतिच्छेद शांकल होगा। शांकल का पता लगाइए और उसका स्थूल चित्र बनाइए। 3
5. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य? अपने उत्तरों के कारण भी बताइए। 10
- (a) कोई भी दो गोले चार वास्तविक बिन्दुओं में प्रतिच्छेद करते हैं।
- (b) बिन्दु $(4, -3)$ दीर्घवृत्त $5x^2 + 7y^2 = 11$ के अंदर स्थित होता है।

- (c) शंकु के प्रत्येक बिन्दु पर अनंततः कई स्पर्शरेखाएँ खींची जा सकती है।
- (d) समतल $x=0$ द्वारा एक पृष्ठी अतिपरवलयज $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ की उर्ध्वाधर अनुप्रस्थ-काट एक परवलय होता है।
- (e) $\frac{x-3}{7} = \frac{y-5}{-2}$ त्रिविम समष्टि में समतल को निरूपित करता है।
-