

## BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

December, 2011

## MATHEMATICS

## MTE-3 : MATHEMATICAL METHODS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

**Note :** Question no. 7 is compulsory. Do any four questions from question no. 1 to 6. Use of calculator is not allowed.

1. (a) Show that the points A, B, C with position vectors  $(2i - j + k)$ ,  $(i - 3j - 5k)$  and  $(3i - 4j - 4k)$  respectively, are the vertices of a right angled triangle. 3
- (b) If  $xy = e^{x-y}$ , prove that  $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$ . 3
- (c) For a binomial variate  $x$ , if  $n = 6$  and  $9p(x=4) = p(x=2)$  then find the probability of success  $p$ . 4
2. (a) Trace the curve  $xy^2 = 4a^2(2a - x)$ . 5

- (b) Two researchers adopted different sampling techniques while investigating the same group of students to find the number of students of different intelligence levels. The results are as follows : 5

Researcher	No. of students in each level		
	Below Average	Average	Above Average
X	86	60	54
Y	40	33	27

Would you say that the sampling techniques adopted by the two researchers are significantly different at 5% level of significance ?

(You may use the following values.

$$\chi_{2,0.05}^2 = 5.99$$

$$\chi_{5,0.05}^2 = 11.07$$

$$\chi_{3,0.05}^2 = 7.82)$$

3. (a) The sum of first three terms of a G.P. is 14 and their product is 64. Find the first term and the common ratio of the G.P. 3

(b) Evaluate the following integral.

3

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}} dx.$$

(c) Suppose 5 students are enrolled in a course. The amount of time (in hours) each student spends per week is 6, 9, 11, 8, 16.

4

- (i) Compute the population mean
- (ii) Calculate the sample means by selecting samples of three individuals.
- (iii) Find the mean of the sample means obtained in (ii) above.

4. (a) Solve the differential equation

3

$$(4x - y + 5)dx + (2y - x + 3)dy = 0.$$

(b) The product of two positive real numbers is 25. Find the minimum value of their sum.

3

(c) Calculate the coefficient of correlation between  $x$  and  $y$  from the following data :

4

x :	1	3	4	5	7
y :	3	7	9	11	15

Also find the line of regression of  $y$  on  $x$ .

5. (a) Let the function  $f: R \rightarrow R$  be defined as  $f(x) = 4x + 1$ . Is  $f$  one-one? Is  $f$  onto? Find  $f^{-1}$ , if it exists. 3

- (b) Evaluate 2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{2x^2 - 3x + 1}$$

- (c) The p.d.f. of a random variable  $X$  is : 5

$$f(x) = y_0 e^{-b(x-a)}, \quad a \leq x < \infty$$

where  $a$ ,  $b$  and  $y_0$  are constants. Show that

$$y_0 = b = \frac{1}{\sigma}, \quad a = m - \sigma \text{ and C.D.F of } X \text{ is}$$

$$1 - e^{-\frac{x}{\sigma} + \frac{m}{\sigma} - 1} \text{ where } m \text{ and } \sigma \text{ are respectively}$$

the mean and standard deviation of the variable  $X$ .

6. (a) From 3 capitals, 5 consonants and 4 vowels, how many words can be formed, each containing 3 consonants and 2 vowels and beginning with a capital? 4

- (b) Calculate the mean, median and mode for the following frequency distribution : 6

Class-interval	Frequency
0-8	8
8-16	7
16-24	16
24-32	24
32-40	15
40-48	7

7. State whether the following statements are *true* or *false*. Give reasons for your answers. 2x5=10

- (a) A number is chosen at random among the first 120 natural numbers. The probability of the number chosen being a multiple of 5

or 15 is  $\frac{1}{5}$ .

- (b) If  $x$  is a Poisson variate such that

$p(x=3) = \frac{2}{3} p(x=4)$  then mean of  $x$  is 6.

- (c) The equation of the circle which passes through the point (1, 2) and whose centre is (-3, 2) is  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ .

- (d) The function  $f(x) = |x|$  has differential coefficient at  $x=0$ .
- (e) If A and B are independent events then  $P(A \cap B) = 0$ .
-

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2011

गणित

एम.टी.ई.-3 : गणितीय विधियाँ

NOT समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (a) दिखाइए कि स्थिति सदिश क्रमशः 3  
 $(2i - j + k)$   $(i - 3j - 5k)$  और  $(3i - 4j - 4k)$  वाले  
 बिंदु A, B, C, समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।
- (b) यदि  $x^y = e^{x-y}$ , तब सिद्ध कीजिए कि 3  

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$$
- (c) द्विपद विचर  $x$  के लिए यदि  $n=6$  और 4  
 $9p(x=4) = p(x=2)$  हो, तब सफलता  $p$  की  
 प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

2. (a) वक्र  $xy^2 = 4a^2(2a - x)$  का अनुरेखण कीजिए। 5
- (b) दो शोधकर्ताओं ने विभिन्न बुद्धिमत्ता स्तरों के विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात करने के लिए विद्यार्थियों के एक समूह का निरीक्षण करने हेतु अलग-अलग प्रतिचयन तकनीकें अपनाईं। उनके द्वारा प्राप्त परिणाम इस प्रकार हैं। 5

	प्रत्येक स्तर के विद्यार्थियों की संख्या		
शोधकर्ता	औसत से कम	औसत	औसत से ज्यादा
X	86	60	54
Y	40	33	27

क्या आप कहेंगे कि दोनों शोधकर्ताओं द्वारा अपनाई गई प्रतिचयन तकनीकें 5% सार्थकता स्तर पर सार्थक रूप से अलग हैं। (आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं

$$\chi_{2,0.05}^2 = 5.99$$

$$\chi_{5,0.05}^2 = 11.07$$

$$\chi_{3,0.05}^2 = 7.82)$$

3. (a) गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योग 14 है और उनका गुणनफल 64 है। गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद और सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए। 3
- (b) निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन कीजिए : 3

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}} dx.$$



- (c) मान लीजिए एक पाठ्यक्रम में 5 विद्यार्थी नामांकित हैं। 4  
 प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा प्रति सप्ताह व्यतीत किया गया समय  
 (घंटों में) 6, 9, 11, 8, 16 है।
- (i) समष्टि माध्य ज्ञात कीजिए।
- (ii) तीन व्यष्टियों के प्रतिदर्श चुनकर प्रतिदर्श माध्य  
 परिकलित कीजिए।
- (iii) ऊपर (ii) में प्राप्त प्रतिदर्श माध्यों का माध्य ज्ञात  
 कीजिए।

4. (a) अवकल समीकरण  
 $(4x - y + 5) dx + (2y - x + 3) dy = 0$  को हल 3  
 कीजिए।
- (b) दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं का गुणनफल 25 है। 3  
 उनके योग का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।
- (c) निम्नलिखित आंकड़ों से  $x$  और  $y$  के बीच सहसंबंध 4  
 गुणांक परिकलित कीजिए :

$x :$	1	3	4	5	7
$y :$	3	7	9	11	15

$x$  पर  $y$  की समाश्रयण रेखा ज्ञात कीजिए।

5. (a) मान लीजिए फलन  $f: R \rightarrow R, f(x) = 4x + 1$  के रूप 3  
 में परिभाषित है। क्या  $f$  एकैकी है? क्या  $f$  आच्छादी  
 है? यदि  $f^{-1}$  का अस्तित्व है तो इसे ज्ञात कीजिए।

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{2x^2 - 3x + 1}$  का मूल्यांकन कीजिए। 2

(c) यादृच्छिक चर X का p.d.f. 5

$f(x) = y_0 e^{-b(x-a)}$ ,  $a \leq x < \infty$  है, जहाँ a, b और

$y_0$  अचर हैं। दिखाइए कि  $y_0 = b = \frac{1}{\sigma}$ ,  $a = m - \sigma$

और X का C.D.F,  $1 - e^{-\frac{x}{\sigma} + \frac{m}{\sigma} - 1}$  है जहाँ m और  $\sigma$

क्रमशः चर X के माध्य और मानक विचलन हैं।

6. (a) 3 बड़े अक्षरों, 5 व्यंजनों और 4 स्वरों से ऐसे कितने शब्द 4

बनाए जा सकते हैं जिनमें प्रत्येक शब्द में 3 व्यंजन, 2 स्वर हों और वह बड़े अक्षर से शुरू होता है?

(b) निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य, माध्यिका और 6

बहुलक ज्ञात कीजिए :

वर्ग-अन्तराल	बारंबारता
0-8	8
8-16	7
16-24	16
24-32	24
32-40	15
40-48	7

7. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। उत्तर के पक्ष में  
कारण दीजिए। 2x5=10

(a) प्रथम 120 प्राकृतिक संख्याओं में से यादृच्छया एक संख्या चुनी जाती है। चुनी गई संख्या के 5 या 15 के गुणांक होने की प्रायिकता  $\frac{1}{5}$  है।

(b) यदि  $x$  एक ऐसा प्वांसा विचर है जिसके लिए

$$p(x=3) = \frac{2}{3} p(x=4), \text{ तब } x \text{ का माध्य } 6 \text{ है।}$$

(c) बिन्दु (1, 2) से गुजरने वाले और केन्द्र (-3, 2) वाले वृत्त का समीकरण  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$  है।

(d) फलन  $f(x) = |x|$  का  $x=0$  पर अवकल गुणांक होता है।

(e) यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तब  $P(A \cap B) = 0$ .