No. of Printed Pages : **11**

MTE-2

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-2 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours | *Maximum Marks : 50*
(Weightage 70%)

Note : ***Q. No. 7** is **compulsory**. Attempt **any four** questions from Q. No. **1** to **6**. calculators are not allowed.*

---

1. (a) Show that the set of positive real numbers $\mathbb{R}^+$ is a vector space over the field of real numbers $\mathbb{R}$ with 'addition' of two vectors defined as multiplication of real numbers and 'scalar multiplication' defined as $\alpha.v = v^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^+$. **3**

(b) Let W_1 and W_2 be subspaces of a vector space V. Prove that $W_1 \cup W_2$ is a subspace of V if and only if $W_1 \subseteq W_2$ or $W_2 \subseteq W_1$. **3**

(c) Let V be the vector space of polynomials with real coefficients and of degree atmost 2. If D is differential operator on V and $B = \{1 + x, x + x^2, x^2\}$ is an ordered basis of V, find $[D]_B$. **4**

05942

2. (a) Let P_3 be the space of polynomials of degree at most three. Let $\phi : P_3 \to \mathbb{R}$ be a map defined by 6

$\phi\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3.$

(i) Check that ϕ is a linear map.

(ii) Is ϕ onto ? Justify your answer.

(iii) Find a basis for the kernel of ϕ.

(b) Verify cayley – Hamilton theorem for the 4

matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Also find A^{-1}, if it exists.

3. (a) Let $\{V_1, ..., V_m\}$ be a linearly independent set of vectors in a vector space V and let the vectors $\{w_1, ..., w_n\}$ span V. Prove that $m \leq n$. 4

(b) Consider the basis $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ of the vector space D^3 over D. Find the dual basis of $\{e_1, e_2, e_3\}$. 4

(c) Let V be the set of all ordered pairs of real numbers. For $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, define $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ and for any $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha x = (\alpha x_1, 0)$. Check whether V is a vector space over $\mathbb{R}$ under the addition and scalar multiplication defined above ? 2

4. (a) Check whether the matrix $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ is diagonalisable. 6

If yes, find an invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix. Otherwise, find the minimal polynomial of A.

(b) Find two mutually orthogenal vectors of $\mathbb{R}^3$, each of which is orthogenal to $(1, 2, -1)$, with respect to the standard inner product of $\mathbb{R}^3$. 4

Hence find an orthonormal bases of $\mathbb{R}^3$.

5. (a) Let $A=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2}, & i/\sqrt{2}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ i/\sqrt{2}, & 1/\sqrt{2}, & 0 \end{bmatrix}$. 3

Check whether A is :

(i) Hermitian. (ii) Unitary.

(b) Find the adjoint of the matrix 5

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ and hence find its inverse.

(c) Find the equation of the plane perpendicular to $i+j+k$ and passing through point (1,2,3). 2

6. (a) Consider the quadratic form 6

$Q : 2x^2 - 4xy + y^2 + 4xz + 3z^2$

(i) Determine a symmetric matrix A satisfying $Q = X^t AX$.

(ii) Find the orthogenal canonical reduction of the quadratic form.

(iii) Also find the principal axes of the given form.

(b) Let $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be defined by : 2

$T(x, y) = (2x - y, n + y)$.

Let $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$

$B_2 = \{(1, -1), (1, 0)\}$, be two bases of $\mathbb{R}^2$.

Find $B_2^{[T]}B_1$.

(c) Let $W = \{(x, y, z) \epsilon \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = z\}$. 2

Verify that W is a subspace of $\mathbb{R}^3$.

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer either with a short proof or by a counter example. 10

(a) If W_1 and W_2 are subspaces of $\mathbb{R}^3$ such that dim. $W1 = \dim W_2 = 2$, then $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

(b) If S and T are linear operators on a limits dimensional vector space, then :

rank $(S+T) = \text{rank } (S) + \text{rank } (T)$.

(c) If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then 0 and 1 are the eigen values of A_0.

(d) There is no hermitian operator with minimal polynomial $x^2 + 1$.

(e) Any subset of a set of linearly dependent vectors is also linearly dependent.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसंबर, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-2 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *प्रश्न संख्या 7 करना **ज़रूरी** है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलक्युलेटर के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. (a) दिखाइए कि धन वास्तविक संख्याओं $\mathbb{R}^+$ का समुच्चय वास्तविक संख्याओं के गुणन के रूप में परिभाषित दो सदीशों के 'योग' और $\alpha.v = v^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^+$. के रूप में परिभाषित 'अदिश गुणन' वाली संक्रियाओं के साथ वास्तविक संख्याओं $\mathbb{R}$ के क्षेत्र पर सदिश समीष्टि है। **3**

(b) मान लीजिए W_1 और W_2 सदिश समष्टि की उपसमष्टियाँ है। सिद्ध कीजिए की $W_1 \cup W_2$ V उपसमष्टि है, यदि और केवल यदि $W_1 \subseteq W_2$ या $W_2 \subseteq W_1$. **3**

(c) मान लीजिए V वास्तविक गुणोंकों वाले और अधिक से अधिक 2 घात के सभी बहुपदों की सदिश समष्टि V है। यदि D,V पर अवकलक संकारक है और $B = \{1 + x,\ x + x^2,\ x^2\}$ V का क्रमित आधार है, तब $[D]_B$ ज्ञात कीजिए। **4**

2. (a) मान लीजिए P_3 अधिक से अधिक 3 घात के बहुपदों की समष्टि है। मान लीजीए $\phi : P_3 \to \mathbb{R}$, 6

$$\phi\ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

इस परिभाषित प्रतिचित्र है।

(i) जाँच कीजिए कि ϕ एक रैखिक प्रतिचित्र है।

(ii) क्या ϕ आच्छादी है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(iii) ϕ की अष्टि का आधार ज्ञात कीजिए।

(b) निम्नलिखित आव्यूह A के लिए केली–हेमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए : 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

यदि A^{-1} का अस्तित्व है तो इसे भी ज्ञात कीजिए।

3. (a) मान लीजिए $\{V_1, ..., V_m\}$ सदिश समष्टि V में रैखिकत: स्वतंत्र सदिशों का समुच्चय है और मान लिजिए सदिश $\{w_1, ..., w_n\}$ V की विस्तृति है। सिद्ध कीजिए कि $m \le n$. 4

(b) D पर सदिश समष्टि D^3 का आधार $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ लीजिए। $\{e_1, e_2, e_3\}$ का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए। 4

(c) मान लीजिए V वास्तविक संख्याओं के सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है। $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$ के लिए $x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2)$ और किसी $\alpha \in \mathbb{R}$ के लिए $\alpha x=(\alpha x_1, 0)$ द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिए कि क्या ऊपर परिभाषित योग और अदिश गुणन के अधीन V, $\mathbb{R}$ पर सदिश समष्टि है? **2**

4. (a) जाँच कीजिए कि क्या आव्यूह। **6**

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

विकर्णनीय यदि ऐसा है तो वह व्युत्क्रमणीय आव्यूह P ज्ञात कीजिए जिससे कि $P^{-1}AP$ एक विकर्ण आव्यूह है। अन्यथा, A का अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए।

(b) $\mathbb{R}^3$ के ऐसे दो परस्पर लांबिक सदिश ज्ञात कीजिए कि इनमें से प्रत्येक $\mathbb{R}^3$ के मानक आंतर गुणनफल के सापेक्ष, $(1, 2, -1)$ के लांबिक हो। इस तरह $\mathbb{R}^3$ का एक प्रसामान्य आधार ज्ञात कीजिए। **4**

5. (a) मान लीजिए **3**

$$A=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2}, & i/\sqrt{2}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ i/\sqrt{2}, & 1/\sqrt{2}, & 0 \end{bmatrix}.$$

जाँच कीजिए कि A (i) हर्मिटी (ii) ऐकिक है या नहीं।

(b) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए और इस तरह इसका प्रतिलोम ज्ञात कीजिए। 5

(c) ऐसे समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $i+j+k$ के लंब हो ओर बिन्दु (1, 2, 3) से होकर गुज़रता हो। 2

6. (a) द्विघाती समघात 6

$Q : 2x^2 - 4xy + y^2 + 4xz + 3z^2$ लीजिए।

(i) $Q = X^tAX$ को संतुष्ट करने वाला सममित आव्यूह A निर्धारित कीजिए।

(ii) द्विघाती समघात का लांबिक विहित समानयन ज्ञात कीजिए।

(iii) साथ ही, दी हुई समघात के मुख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए।

(b) मान लीजिए $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, 2

$T(x, y) = (2x - y, n + y)$ इस परिभाषित है।

मान लीजिए $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$
$B_2 = \{(1, -1), (1, 0)\}$,

$\mathbb{R}^2$ के दो आधार हैं।

${}_{B_2}[T]_{B_1}$ ज्ञात कीजिए।

(c) मान लीजिए $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = z\}$. 2
सत्यापित कीजिए कि W, $\mathbb{R}^3$, की एक उपसमष्टि है।

7. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य और कौन से कथन असत्य हैं। लघु उपपति या प्रति –उदाहरण द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 10

(a) यदि W_1 और W_2 $\mathbb{R}^3$ के ऐसी उपसमष्टियों है जिसमें dim. $W_1 = \dim W_2 = 2$, तब $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

(b) यदि S और T परिमित विमा सदिश समष्टि पर रैखिक संकारक हैं तब

$$\text{rank } (S+T) = \text{rank } (S) + \text{rank } (T).$$

(c) यदि A ऐसा वर्ग आव्यूह है जिसके लिए $A^2 = A$, तब 0 और-1, A के आइगेनमान है।

(d) अल्पिष्ठ बहुपद x^2+1 वाला कोई हर्मिटी संकारक नहीं होता।

(e) रैखिकतः आश्रित सदिशों के समुच्चय का कोई भी उपसमुच्चय रैखिकतः आश्रित होता है।