No. of Printed Pages : **11**

MTE-14

01995

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

*Note : Attempt **any five** questions. All questions carry equal marks. Use of calculator is **not** allowed.*

1. (a) If the per capita rate of a population growth be constant, discuss the behaviour of the population at any time t depending on the constant being positive or negative. **5**

(b) If the time of a body's descent in a straight line towards a given point is directly proportional to the square of the distance fallen through, then show that the acceleration of the body is inversely proportional to the cube of the distance fallen through. **3**

(c) Determine whether the equation : $s = s_o + v_o t - 0.5gt^2$ is dimensionally compatible. If s is the position of the body at time t, s_o is the position at $t = 0$, v_o is the initial velocity and g is the acceleration due to gravity. Give reasons for your answer. 2

2. (a) An object of mass m is dropped from rest in a medium that offers resistance proportional to the magnitude of the instantaneous velocity of the object. Assuming the gravitational force to be constant, find the position and velocity of the object at any time t. Also find the limiting value of velocity at $t \to \infty$. What happens to this limiting value as resistance diminishes ? 6

(b) Consider the fluid flow in rigid tube of circular cross-section for which poiseuille law holds good. If the length of the tube is 3 cm, radius 9×10^{-3} cm. and driving force $P = P_1 - P_2 = 5 \times 10^3 \text{dyne/cm}^2$, then find the average and maximum velocity of the flow and compare them. You may take the viscosity of the fluid to be $\mu = 0.027$ poise. 4

3. (a) For steady state assuming the wind velocity and diffusion coefficient to be in x-direction only, derive an expression for the dispersion of a contaminant using Fick's law of diffusion. 5

(b) In a game of matching coins with two players A and B, suppose A wins one unit of value when there are two heads, wins nothing when there are two tails and loses $\frac{1}{2}$ unit of value when there are one head and one tail. Determine the pay off matrix, the best strategies for each player and the value of the game. 5

4. (a) Derive Poiseuille law using dimensional analysis. 3

[Hint : Dimension of viscosity is $\frac{M}{LT}$]

(b) The conduction of heat in a rod of length l is modelled by a partial differential equation 7

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

where $\theta(x,t)$ is the temperature and k is the thermal conductivity. If the rod initially has a uniform temperature of 10°C and it is insulated at the two ends, find :

(i) the initial and boundary conditions.

(ii) the temperature $\theta(x, t)$ at any time.

5. (a) Find the terminal velocity and time taken by a raindrop of radius 0.8 cm. to reach the ground if it starts its descent in a cloud 35000 m high. 2

(b) Find the output yielding maximum profit for the cost function 4

$$C = 0.7x^3 - 0.8x^2 + 12x + 9$$

given that the cost price of x is Rs. 45/- per unit.

(c) A drug is induced in patient's bloodstream at a constant rate of r gms/sec. Simultaneously the drug is removed at a rate proportional to the amount $x(t)$ of the drug present at any time t. Determine the differential equation governing the amount $x(t)$. If the initial concentration of the drug in the bloodstream is x_o, find the concentration of the drug at any time t. 4

6. (a) Derive the solution of the differential equation representing the behaviour of the response of an undamped forced system. 5

$$\frac{1}{8}x''(t) + 2x(t) = \sin \omega t$$

$$x(o) = 0, \; x'(o) = 0$$

for the two cases :

(i) $\omega \neq 4$ (ii) $\omega = 4$

(b) The population in a colony of single species of birds increased from an initially low level. The proportionate birth and death rates were respectively 50% and 10% per annum, when the population size was 10,000. However, the proportionate birth and death rates were respectively 30% and 20% per annum when the population size was 20,000. If shooting of the bird takes place at rate of 20% of the population size per annum, obtain the steady-state population level. 5

7. (a) The return distribution on 2 securities, A and B is as follows : 7

Event (j)	Chance $P_{1j} = P_{2j}$	Return	
		R_1j	R_2j
1	0.33	19	18
2	0.25	17	16
3	0.17	11	11
4	0.25	10	9

Find which security is more risky in the Markowitz sense.

(b) Give one example each from the real world for the following, along with justification for your example : 3

(i) A non-linear model

(ii) A stochastic model

(iii) A linear, deterministic model

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसंबर, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

1. (a) यदि किसी समष्टि की प्रतिव्यक्ति संवृद्धि-दर अचर हो तो अचर के धनात्मक व ऋणात्मक होने पर किसी भी समय t पर समष्टि के व्यवहार पर चर्चा कीजिए। 5

(b) किसी पिंड को, दिए गए बिंदु की ओर, सरल रेखा में नीचे गिरने में लगा समय यदि नीचे गिरते हुए पिंड द्वारा तय की गयी दूरी के वर्ग के समानुपाती हो तो दिखाइए कि पिंड का त्वरण तय की गयी दूरी के घन के व्युत्क्रमानुपाती है। 3

(c) यदि समय t पर वस्तु की स्थिति s है, t_o पर स्थिति s_o है, v_o प्रारंभिक वेग है और g गुरुत्वीय त्वरण है, तब निर्धारित कीजिए की समीकरण : 2

$s = s_o + v_o t - 0.5gt^2$ विमीय रूप से सुसंगत है या नहीं। अपने उत्तर के कारण बताइए।

2. (a) द्रव्यमान m की एक वस्तु को विश्राम अवस्था से एक ऐसे माध्यम में गिराया जाता है जहाँ प्रतिरोध वस्तु के तात्क्षणिक वेग के परिमाण के समानुपाती है। यह मानकर कि गुरुत्वीय बल अचर है, किसी समय t पर वस्तु की स्थिति और वेग ज्ञात कीजिए। $t \to \infty$ के लिए वेग का सीमित मान भी ज्ञात कीजिए। जैसे-जैसे प्रतिरोध कम होता जाएगा, इस सीमित मान का क्या होगा? 6

(b) एक ऐसी दृढ़ ट्यूब में से द्रव प्रवाह लीजिए जिस ट्यूब का अनुप्रस्थ-परिच्छेद वृत्ताकार है और जिस पर प्वाजय नियम लागू होता है। यदि ट्यूब की लम्बाई 3 cm; त्रिज्या 9×10^{-3} cm और चालक बल $P = P_1 - P_2 = 5 \times 10^3 \text{dyne/cm}^2$ है, तब प्रवाह का औसत और अधिकतम वेग ज्ञात कीजिए और इनकी तुलना कीजिए। आप द्रव की श्यानता $\mu = 0.027$ पायज़ ले सकते हैं। 4

3. (a) स्थायी-अवस्था के लिए, यह मानकर कि वायु वेग और विसरण गुणांक केवल x - दिशा में हैं, तब फिक के विसरण नियम का प्रयोग करके संदूषण के परिक्षेपण के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए। 5

(b) सिक्कों को मिलाने के खेल को दो खिलाड़ी A और B खेल रहे हैं। मान लीजिए दो चित आने पर A एक इकाई जीतता है, और दो पट आने पर कुछ भी नहीं जीतता तथा एक चित और एक पट आने पर $\frac{1}{2}$ इकाई गँवा देता है। भुगतान आव्यूह, प्रत्येक खिलाड़ी के लिए सर्वोत्तम युक्ति और खेल का मान निर्धारित कीजिए। 5

4. (a) विमीय विश्लेषण का प्रयोग करते हुए प्वाज़य नियम व्युत्पन्न कीजिए। 3

[संकेत : श्यानता की विमा $\frac{M}{LT}$ है।]

(b) लम्बाई l वाली छड़ में ऊष्मा-चालन आंशिक अवकल समीकरण : 7

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

द्वारा निदर्शित है, जहाँ $\theta(x,t)$ तापमान है, और k तापीय चालकता है। यदि शुरू में छड़ का एकसमान तापमान 10°C है और यह दो सिरों पर ऊष्मारोधी है तब निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

(i) प्रारंभिक और परिसीमा प्रतिबंध।

(ii) किसी भी समय पर तापमान $\theta(x, t)$ ।

5. (a) त्रिज्या 0.8 cm वाली वर्षा की एक बूँद का अंतिम वेग तथा उसके भूमि तक पहुँचने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए, यदि वह 35000 m ऊँचे एक बादल से नीचे गिरना प्रारंभ करती है। 2

(b) वह उत्पादन ज्ञात कीजिए जिससे लागत फलन : 4

$$C = 0.7x^3 - 0.8x^2 + 12x + 9$$

के लिए अधिकतम लाभ प्राप्त हो, जबकि दिया गया है कि x की कीमत 45 रु. प्रति इकाई है।

(c) कोई दवाई एक रोगी की रक्त धारा में r ग्राम/सेकण्ड की अचर दर से प्रेरित की जा रही है। इसके साथ ही, यह दवाई किसी भी समय t पर उपस्थित दवाई की मात्रा $x(t)$ के समानुपाती दर से निकाली जा रही है। मात्रा $x(t)$ नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण निर्धारित कीजिए। यदि रक्त धारा में दवाई की प्रारंभिक सांद्रता x_o है तो इस दवाई की किसी भी समय t पर सांद्रता ज्ञात कीजिए। 4

6. (a) दो स्थितियों (i) $\omega \neq 4$ (ii) $\omega = 4$ के लिए अवमंदित प्रणोदित तंत्र : 5

$$\frac{1}{8}x''(t) + 2x(t) = \sin \omega t$$

$$x(o) = 0, \; x'(o) = 0$$

की अनुक्रिया के व्यवहार को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

(b) पक्षियों की एकल स्पीशीज़ की कॉलोनी में समष्टि के प्रारंभिकतः निम्न तल में वृद्धि हुई। जब समष्टि का आमाप 10,000 था तब आनुपातिक जन्म और मृत्यु दरें प्रति वर्ष क्रमशः 50% और 10% थीं। तथापि, समष्टि आमाप 20,000 होने पर आनुपातिक जन्म और मृत्यु दरें प्रति वर्ष क्रमशः 30% और 20% थीं। यदि प्रति वर्ष समष्टि आमाप के 20% की दर से पक्षियों को मारा जाता है, तब स्थायी अवस्था समष्टि स्तर प्राप्त कीजिए। 5

7. (a) दो प्रतिभूतियाँ A और B का प्रतिफल बंटन निम्नलिखित है। 7

घटना (j)	प्रायिकता $P_{1j} = P_{2j}$	प्रतिफल	
		R_1j	R_2j
1	0.33	19	18
2	0.25	17	16
3	0.17	11	11
4	0.25	10	9

मार्कोविट्ज़ निदर्श के अनुसार कौन-सी प्रतिभूति अधिक जोख़िम वाली है ?

(b) निम्नलिखित के लिए वास्तविक जीवन से संबंधित एक-एक उदाहरण तर्कसंगत दीजिए : 3

(i) अरैखिक निदर्श

(ii) प्रसंभाव्य निदर्श

(iii) रैखिक, निर्धारणात्मक निदर्श।