01532

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 hours | *Maximum Marks : 50*

Note : *Question 1 is **compulsory**. Do **any four** questions from question number 2 to 7. Calculators are not allowed.*

1. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Justify your answer. **10**

(a) 'Close the door' is a statement.

(b) Sn, the number of subsets of a set of n elements, satisfies a recurrence of order 2.

(c) If $n \geq 2$, $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $|S| = n+1$, then S contains at least one pair of coprime integers.

(d) Every bipartite graph is a tree.

(e) The generating function for the sequence $(-1)^n$ is $\frac{1}{1-z}$.

2. (a) Define the hypercube graph Qn. How many vertices and edges does it have ? Explain your answer. **4**

(b) Solve the recurrence relation $a_{n+1} - a_n = 5^n$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$ using generating function. 6

3. (a) Let a_n be the number of n digit odd numbers. Formulate a recurrence for a_n stating the initial conditions. 3

(b) Use Mathematical Induction to prove that $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)$ for $n \geq 1$. 4

(c) Find the number of 5 lettered words over the alphabet {a, b, c} in which second letter is b and fourth letter is a ? 3

4. (a) Show that 3

$$(p \rightarrow \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim r) \equiv \sim (p \wedge (q \vee r))$$

(b) How many numbers from 0 to 999 are not divisible by either 5 or 7 ? 3

(c) Solve the recurrence given by $x_n = \dfrac{x_{n-1}^5}{x_{n-2}^6}$, 4

together with the initial conditions $x_0 = 1$, $x_1 = 3$

5. (a) Find coefficient of $a^6b^3c^3$ in expansion of $(a+b+2c)^{12}$. 3

(b) Determine the validity of the following argument : **5**

If my plumbing plans do not meet the construction code, then I cannot build my house.

If I hired a licensed contractor, then my plumbing plans will meet the construction code.

I hired a licensed contractor.

$\therefore$ I can build my house.

(c) Let G be a (p, q) graph all of whose vertices have degree 1 or 2. Find the number of vertices of degree 1 in terms of p and q. **2**

6. (a) Show that any tree with exactly two vertices of degree 1 is a path. **3**

(b) How many distinct solutions are there of the equation $x+y+z+w=15$ in non negative integers and how many solutions are there in positive integers ? **4**

(c) Show that the Peterson graph is not 3-critical. **3**

7. (a) State Dirac's theorem. Construct a connected non-Hamiltonian graph on 5 vertices in which each vertex has degree 2 or more. 3

(b) Draw the logic circuit for the expression $(x_1' \vee (x_2 \wedge x_3')) \wedge (x_2 \vee x_4')$. 4

(c) A box contain two white socks and two blue socks. Two socks are drawn at random. Find the probability that they are of same colour. 3

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसंबर, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *प्रश्न संख्या 1* ***अनिवार्य*** *है। प्रश्न संख्या 2 से 7 में से कोई* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *हैं।*

1. निम्नलिखित में से कौन से कथन ***सत्य*** हैं और कौन से कथन ***असत्य*** हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **10**

(a) 'दरवाज़ा बंद करो' एक कथन है।

(b) Sn जो n अवयवों के समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या है, कोटि 2 की पुनरावृत्ति को संतुष्ट करती है।

(c) यदि $n \geqslant 2$, $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $|S| = n+1$, तब S में असहभाज्य (coprime) पूर्णांकों का कम से कम एक युग्म होता है।

(d) प्रत्येक द्विभाजित ग्राफ वृक्ष होता है।

(e) अनुक्रम $(-1)^n$ का जनक फलन $\frac{1}{1-z}$ है।

2. (a) अतिघन ग्राफ Qn को परिभाषित कीजिए। इसमें कितने शीर्ष और कोर होते हैं? अपने उत्तर को स्पष्ट कीजिए। 4

(b) जनक फलन का प्रयोग करते हुए पुनरावृत्ति संबंध $a_{n+1} - a_n = 5^n$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$ को हल कीजिए। 6

3. (a) मान लीजिए a_n, n अंक वाली विषम संख्याओं की संख्या है। प्रारंभिक प्रतिबंधों को बताते हुए a_n के लिए एक पुनरावृत्ति सूत्रित कीजिए। 3

(b) गणितीय आगमन द्वारा सिद्ध कीजिए कि $n \geq 1$ के लिए $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2 \ (2n^2 - 1)$. 4

(c) वर्णमाला {a, b, c} से बनाए गए पाँच-अक्षरों वाले शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें दूसरा अक्षर b और चौथा अक्षर a हो। 3

4. (a) दिखाइए कि 3

$$(p \to \sim q) \wedge (p \to \sim r) \equiv \sim (p \wedge (q \vee r).$$

(b) 0 से 999 तक कितनी संख्याएँ हैं जो पाँच से या सात से भाज्य नहीं होती? 3

(c) $x_n = \dfrac{x^5_{n-1}}{x^6_{n-2}}$ द्वारा दी गई पुनरावृत्ति को हल कीजिए जहाँ प्रारंभिक प्रतिबंध $x_0 = 1$ और $x_1 = 3$ है। 4

5. (a) $(a+b+2c)^{12}$ के प्रसार में $a^6b^3c^3$ का गुणांक ज्ञात कीजिए। 3

(b) निम्नलिखित तर्क की वैधता निर्धारित कीजिए : 5

यदि मेरी नल आदि संबंधी योजनाएँ निर्माण कोड के अनुसार नहीं हैं, तब मैं अपना घर नहीं बना सकता।

यदि मैं लाइसेंस - प्राप्त ठेकेदार से काम कराता हूँ, तो मेरी नल आदि संबंधी योजनाएँ निर्माण कोण के अनुसार होंगी।

मैंने लाइसेंस - प्राप्त ठेकेदार से काम कराया।

$\therefore$ मैं अपना घर बना सकता हूँ।

(c) मान लीजिए G एक ऐसा (p, q) ग्राफ है जिसके सभी शीर्षों की घात 1 या 2 है। p और q के पदों में घात 1 वाले शीर्षों की संख्या ज्ञात कीजिए। 2

6. (a) दिखाइए कि घात 1 के ठीक दो शीर्षों वाला कोई भी वृक्ष पथ है। 3

(b) $x+y+z+w=15$ के ऋणेतर पूर्णांकों में और धन पूर्णांकों में कितने अलग-अलग हल हैं ? 4

(c) दिखाइए कि पेटर्सन-ग्राफ 3-क्रांतिक नहीं है। 3

7. (a) डिराक-प्रमेय का कथन दीजिए। 5 शीर्षों पर एक संबद्ध अ-हैमिल्टोनीय ग्राफ बनाइए जिसमें प्रत्येक शीर्ष की दो या अधिक घात हों। 3

(b) व्यंजक

$(x_1' \vee (x_2 \wedge x_3') \wedge (x_2 \vee x_4')$ के लिए तर्क पथ बनाइए। 4

(c) एक बक्से में दो सफेद ज़ुराबें और दो नीली ज़ुराबें हैं। दो ज़ुराबे यादृच्छया उठायी जाती हैं। दोनों ज़ुराबें एक ही रंग की होंगी, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 3