

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2011

MATHEMATICS

MTE-10: NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : Answer *any five* questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculator is *not* allowed.

1. (a) Find the maximum stepsize h that can be used in the tabulation of $f(x) = \sin x$ in the interval $[0, \pi/2]$ at equally spaced nodal points so that the truncation error of the linear interpolation is less than 5×10^{-6} . 2
- (b) Using the stepsize $h = \frac{1}{2}$ interpolate the function $f(x) = x - 9^{-x}$ in the interval $[0, 1]$. 3
- (c) Determine the order of convergence of the iterative method 5

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

for finding a simple root of the equation $f(x) = 0$.

2. (a) Determine the rate of convergence of the Gauss-Seidal method for solving the system of equations. 5

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- (b) Determine the constants a, b, c and d such that the interpolation polynomial. 5

$$y_s = y(x_0 + sh) = ay_0 + by_1 + h^2(cy_0'' + dy_1'')$$

is of the highest possible order.

3. (a) The polynomial $p(x) = 2 - (x + 1) + x(x + 1) - 2x(x + 1)(x - 1)$ interpolates the first four points in the following table : 3

| | | | | | |
|---|----|---|---|----|----|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 2 | 1 | 2 | -7 | 10 |

By adding one additional term to $p(x)$, find a polynomial that interpolates the given table.

- (b) A differentiation rule of the form $f'(x_0) = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, ($x_k = x_0 + kh$) is given. Find the values of α_0 , α_1 and α_2 so that the rule is exact for all polynomials of degree less than or equal to 2. Also find the error term. 5

- (c) Does a bound for the error $R_3(x)$ in the Taylor expansion for the function 2
Taylor expansion for the function

$$f(x) = x^{5/2} \text{ in }] -1, 1 [\text{ about } x=0 \text{ exist ?}$$

Justify your answer.

4. (a) Use Simpson's rule with $h=0.5$ and 0.25 to 5
evaluate the integral

$$I = \int_0^1 \frac{x \, dx}{1+x+x^2}.$$

Use Romberg integration to improve the result.

- (b) Use divided difference formula to find the 5
interpolating polynomial for the following data :

| | | | | | | |
|--------|-----|----|---|---|-----|------|
| x | -3 | -2 | 0 | 1 | 4 | 6 |
| $f(x)$ | 136 | 22 | 4 | 4 | 472 | 2494 |

Hence, find the value of $f(5)$.

5. (a) Using two iterations of power method find 5
the largest eigen value and the corresponding eigen vector of the matrix.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 20 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Assume the initial approximation to the eigen vector as $V = [1 \ 1 \ 1]^T$.

- (b) The equation $x^3 + 2x^2 - 5 = 0$ has a positive root in the interval $]1, 2[$ write a fixed point iteration method which converges. Starting with initial approximation $x_0 = 1.5$ find the root of the equation. Perform two iterations. 5

6. (a) Find the inverse of the matrix 5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Using LU decomposition method. Take $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$. 5

- (b) Obtain an approximation to $y(0.2)$ for the initial value problem.

$$y' = t + y, y(0) = 1,$$

using the classical Runge-Kutta method of fourth order with $h = 0.2$. Suppose that $y(0.2)$ is also obtained with $h = 0.1$. Write the extrapolation formula to obtain a better approximation to $y(0.2)$.

7. (a) Given that $f(0) = 1, f(1) = 3, f(3) = 55$, find the unique polynomial of degree 2 or less, which fits the given data. Find the bound on the error. 5

- (b) A particle is moving along a straight line. The displacement x of the particle at some time instance t are given below : 5

| | | | | | |
|-----|---|---|----|----|----|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| x | 5 | 8 | 12 | 17 | 26 |

Find the velocity and acceleration of the particle at $t = 4$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2011

गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक निकटित किए जा सकते हैं। कैलकुलेटरो का प्रयोग करना मना है।

1. (a) अंतराल $[0, \pi/2]$ में फलन $f(x) = \sin x$ की समदूरी मानों की तालिका बनाने के लिए वह अधिकतम सोपान लंबाई h ज्ञात कीजिए जिससे कि इस तालिका में प्रथम घात बहुपद अंतर्वेशन से प्राप्त खंडन त्रुटि 5×10^{-6} से कम हो। 2
- (b) सोपान लंबाई $h = \frac{1}{2}$ का प्रयोग करके अंतराल $[0, 1]$ में फलन $f(x) = x - 9^{-x}$ का अंतर्वेशन कीजिए। 3
- (c) समीकरण $f(x) = 0$ का साधारण मूल ज्ञात करने के लिए पुनरावृत्ति विधि 5

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

की अभिसरण कोटि निर्धारित कीजिए।

2. (a) समीकरण निकाय

5

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

को गाउस-सीडल विधि से हल करने के लिए विधि की अभिसरण दर ज्ञात कीजिए।

(b) अचर a, b, c और d के वे माग ज्ञात कीजिए जिससे कि अंतर्वेशन बहुपद

5

$$y_s = y(x_0 + sh) = ay_0 + by_1 + h^2(cy_0'' + dy_1'')$$

अधिकतम संभव कोटि का हो।

3. (a) बहुपद

3

$p(x) = 2 - (x + 1) + x(x + 1) - 2x(x + 1)(x - 1)$
निम्नलिखित तालिका के प्रथम चार बिंदुओं का अंतर्वेशन करता है।

| | | | | | |
|-----|----|---|---|----|----|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 2 | 1 | 2 | -7 | 10 |

$p(x)$ में एक अतिरिक्त पद जोड़ कर वह बहुपद ज्ञात कीजिए जो इस तालिका का अंतर्वेशन करता हो।

(b) अवकलन सूत्र

5

$f'(x_0) = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, ($x_k = x_0 + kh$) दिया गया है। $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ के वह मान ज्ञात कीजिए जिससे कि 2 या 2 से कम घात वाले सभी बहुपदों के लिए सूत्र यथातथ हो। त्रुटि पद भी ज्ञात कीजिए।

- (c) क्या $x=0$ के प्रति अंतराल $] -1, 1 [$ में फलन 2
 $f(x) = x^{5/2}$ के टेलर श्रेणी प्रसार में त्रुटि $R_3(x)$ के
परिबंध का अस्तित्व है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

4. (a) $h=0.5$ और 0.25 लेकर सिम्प्सन नियम द्वारा समाकलन 5

$$I = \int_0^1 \frac{x dx}{1+x+x^2}$$

का मान प्राप्त कीजिए। रॉम्बर्ग समाकलन द्वारा परिणाम में सुधार लाइए।

- (b) विभाजित अंतर द्वारा निम्नलिखित आकड़ों के लिए 5
अंतर्वेशन बहुपद ज्ञात कीजिए।

| | | | | | | |
|--------|-----|----|---|---|-----|------|
| x | -3 | -2 | 0 | 1 | 4 | 6 |
| $f(x)$ | 136 | 22 | 4 | 4 | 472 | 2494 |

अतः $f(5)$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. (a) घात विधि की दो पुनरावृत्तियां करके निम्नलिखित आव्यूह 5
का वृहत्तम आइगनमान और संगत आइगनसदिश ज्ञात
कीजिए।

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 20 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

आइगनसदिश का प्रारंभिक सन्निकटन $V = [1 \ 1 \ 1]^T$
लिजिए।

- (b) अंतराल $]1, 2[$ में समीकरण $x^3 + 2x^2 - 5 = 0$ का एक धनात्मक मूल है। नियत बिंदु पुनरावृत्ति विधि लिखिए और दिखाइए कि यह अभिसरित है। प्रारंभिक सन्निकटन $x_0 = 1.5$ से प्रारंभ करके समीकरण का मूल ज्ञात कीजिए। दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 5

6. (a) $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$ लेकर LU वियोजन विधि द्वारा आव्यूह 5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

- (b) $h = 0.2$ लेकर चतुर्थ कोटि चिरप्रतिष्ठित रंगे-कुट्टा विधि द्वारा आदि मान समस्या $y' = t + y$, $y(0) = 1$ के लिए $y(0.2)$ का सन्निकटन प्राप्त कीजिए। मान लीजिए कि $h = 0.1$ लेकर भी $y(0.2)$ प्राप्त किया गया है। $y(0.2)$ का बेहतर सन्निकटन प्राप्त करने के लिए बहिर्वेशन सूत्र लिखिए। 5

7. (a) $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(3) = 55$ दिए गए हैं। घात 2 या उससे कम का अद्वितीय बहुपद ज्ञात कीजिए जो दिए गए आकड़ों में फिट हो सके। त्रुटि पर परिबंध प्राप्त कीजिए। 5

- (b) एक कण सीधी रेखा में गतिमान है। कुछ समयों t पर कण का विस्थापन x नीचे दिया गया है : 5

| | | | | | |
|-----|---|---|----|----|----|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| x | 5 | 8 | 12 | 17 | 26 |

$t = 4$ पर कण वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए।