

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-1 : CALCULUS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : Question no. 1 is compulsory. Do any four questions from question no. 2 to 7. No calculators are allowed.

1. Which of the following statements are true or false ? Justify your answer. 10
- (a) The range of the function f , given by $f(x) = [x], x \in]-1, 1[$, is $\{-1, 0, 1\}$.
- (b) If a function f defined on \mathbf{R} is such that $|f|$ is continuous, then f is also continuous on \mathbf{R} .
- (c) The only asymptote to the curve $x^3 + y^3 = 3axy$ is $x + y + a = 0$.
- (d)
$$\frac{d}{dx} \left[\int_{2x}^{\sin x} \cos t^2 dt \right] = \cos(\sin^2 x) - 2\cos 4x^2.$$
- (e) If a is a point in the domain of the function f such that $f'(a) = 0$, then f has a local maxima at $x = a$.

02922

2. (a) If $y = \sin^{-1} x$, prove that $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$ 4
Hence prove that $y_{n+2}(0) = n^2 y_n(0)$.

- (b) If $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, find $L = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Also find 4
 $\delta > 0$ for $\Sigma = 0.05$ and $x_0 = 2$, such that
 $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \Sigma$.

- (c) Check whether or not the function f , defined 2
by $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x - 7$, is strictly
increasing over R .

3. (a) A function f is defined on R by : 3

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x & \text{if } x \leq 2 \\ 3ax - 4 & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

Determine the value(s) of a so that f becomes continuous on R .

- (b) An object starting from rest moves along a 3
straight path. Its velocity $v(t)$ (in m/sec) at
time t , as recorded at each second for six
seconds, is given in the table below :

t (sec)	1	2	3	4	5	6
v (t) (m/sec)	3	4	6	5	5	3

Find the approximate distance travelled by
the object, using the Trapezoidal rule, in the
first five seconds.

(c) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 2 \sin x + \cos x}$ 4

4. (a) If $I_n = \int_0^{\pi/2} x \sin^n x \, dx$, ($n \geq 1$), prove that 6

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{1}{n^2}.$$

Hence evaluate I_3 .

(b) Differentiate $\sin^{-1} x$ with respect to $\cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$ for $x \in]-1, 1[$. 2

(c) Give an example, with justification of a function which is one-one but not onto. 2

5. Trace the curve $y(a^2 + x^2) = a^2 x$ Clearly stating all the properties used in the process. 10

6. (a) A manufacturer can sell x items per day at a price of p rupees each, where $p = 125 - \frac{5}{3}x$. The cost of production for x items is given by $500 + 13x + 0.2x^2$. Find how many items she should produce to have maximum profit, assuming that all the items produced are sold. 3

(b) Find the volume of the solid generated by the revolution of the curve $(a-x)y^2 = a^2x$, about its asymptote. 5

(c) Find an approximate value of $\ln(0.9)$, upto 3 decimal places, using MacLaurin's expansion. 2

7. (a) Find all the maxima and minima of the function f given by 5

$$f(x) = \int_1^x \left[2(t-1)(t-2)^3 + 3(t-1)^2(t-2)^2 \right] dt$$

(b) Find the length of an arc of the curve given by $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, and obtain the ratio in which $\theta = \frac{2\pi}{3}$ divides it. 5

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसंबर, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-1 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 करना जरूरी है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य या असत्य हैं? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। 10
- (a) $f(x) = [x]$, $x \in [-1, 1]$ द्वारा दिए गए फलन f का गोचर $\{-1, 0, 1\}$ है।
- (b) यदि R पर परिभाषित फलन f ऐसा जिसके लिए $|f|$ संतत है, तब f भी R पर संतत होगा।
- (c) वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$ की केवल एक अनंतस्पर्शी $x + y + a = 0$ है।
- (d) $\frac{d}{dx} \left[\int_{2x}^{\sin x} \cos t^2 dt \right] = \cos(\sin^2 x) - 2\cos 4x^2$.
- (e) यदि a फलन f के प्रांत में एक ऐसा बिन्दु है जिसके लिए $f'(a) = 0$, तब f का $x = a$ पर एक स्थानीय उच्चिष्ठ होता है।

2. (a) यदि $y = \sin^{-1} x$, तब सिद्ध कीजिए कि 4

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$$

इस तरह सिद्ध कीजिए कि $y_{n+2}(0) = n^2 y_n(0)$.

(b) यदि $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, तब $L = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ज्ञात कीजिए। 4

$\Sigma = 0.05$ और $x_0 = 2$ के लिए ऐसा $\delta > 0$ भी ज्ञात कीजिए जिससे कि $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \Sigma$ हो।

(c) जाँच कीजिए कि 2

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x - 7$ द्वारा परिभाषित फलन f R पर निरंतर वर्धमान है या नहीं।

3. (a) फलन f , 3

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x & \text{यदि } x \leq 2 \\ 3ax - 4 & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$$

द्वारा R पर परिभाषित है। a का (के) मान निर्धारित कीजिए जिससे कि f , R पर संतत बन सके।

(b) एक वस्तु विश्राम से प्रारंभ होकर सीधे पथ के साथ-साथ गतिमान होती है। इसके प्रत्येक सेकेन्ड पर रिकार्ड किया गया वेग t समय पर $v(t)$ (मी./से. में) निम्नलिखित सारणी में दिया गया है : 3

t (सेकेंड)	1	2	3	4	5	6
$v(t)$ (मी./सेकेंड)	3	4	6	5	5	3

समलंब नियम से पाँच सेकेंड में वस्तु द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

(c) निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए :

4

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 2 \sin x + \cos x}$$

4. (a) यदि $I_n = \int_0^{\pi/2} x \sin^n x dx$, ($n \geq 1$), तब सिद्ध कीजिए 6

$$\text{कि } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{1}{n^2} \text{ इस तरह } I_3 \text{ का}$$

मूल्यांकन कीजिए।

(b) $x \in]-1, 1[$ के लिए $\cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$ के सापेक्ष 2
 $\sin^{-1} x$ को अवकलित कीजिए।

(c) एक ऐसे फलन का पुष्टि सहित उदाहरण दीजिए जो 2
एकैकी तो है किन्तु आच्छादक नहीं।

5. वक्र $y(a^2 + x^2) = a^2 x$ का अनुरेखण कीजिए। ऐसा करने के 10
लिए इस्तेमाल किए गए सभी गुणधर्मों का स्पष्ट वर्णन कीजिए।

6. (a) एक निर्माता प्रतिदिन p रु. प्रति वस्तु की कीमत पर x 3

वस्तुएँ बेच सकता है, जहाँ $p = 125 - \frac{5}{3}x$ है।

x वस्तुओं के उत्पादन की लागत $500 + 13x + 0.2x^2$
दी गई है। यह मानकर की सभी निर्मित वस्तुएँ बिक
जाती हैं, उस निर्माता को अधिकतम लाभ प्राप्त करने के
लिए कितनी वस्तुएँ बनानी/तैयार करनी चाहिए।

- (b) वक्र $(a-x)y^2 = a^2x$ को इसकी अनंतस्पर्शी के प्रति 5
घुमाने पर प्राप्त घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए।
- (c) मैकलॉरिन प्रसार द्वारा $\ln(0.9)$ का सन्निकट मान 3 2
दशमलव स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

7. (a) $f(x) = \int_1^x [2(t-1)(t-2)^3 + 3(t-1)^2(t-2)^2] dt$ 5

द्वारा दिए गए फलन f के सभी उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

- (b) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ द्वारा दिए गए वक्र 5
के चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए और वह अनुपात प्राप्त
कीजिए जिसमें $\theta = \frac{2\pi}{3}$ इसे विभाजित करता है।
