No. of Printed Pages : 8

MTE-8

00469

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2010

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-8 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : Q. No. 1 is compulsory. Attempt any four questions out of the remaining questions no. 2 - 7. Calculators are not allowed.

---

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answer with the help of a short proof or counter example. **2x5=10**

   (a) The differential equation

   $$(y^4+2y)\,dx+(xy^3+2y^4-4x)\,dy=0$$

   is an exact differential equation.

   (b) The second order p.d.e.

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = x^3 - y$$

   has a solution which involves two arbitrary functions.

   (c) Equation $(D^2+2DD'+D'^2+2D+2D'+1)\,z=0$ is an irreducible p.d.e.

(d) A particular integral of the equation

$$y'' - 2y' = e^x \sin x$$

is $\frac{1}{2} e^x \sin x$.

(e) The partial differential equation

$$\left(x^2 - 1\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

is hyperbolic for all (x, y) outside the circle $x^2 + y^2 = 1$.

2. (a) Solve the differential equation 2

$3 e^x \tan y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$.

(b) Solve the simultaneous differential equation 3

$$\frac{dx}{x\left(y^2 - z^2\right)} = \frac{dy}{-y\left(z^2 + x^2\right)} = \frac{dz}{z\left(x^2 + y^2\right)}.$$

(c) Solve the following equation, using method of variation of parameters. 5

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = \frac{2}{1 + e^x}.$$

3. (a) Solve the differential equation 3

$$x \, dy - y \, dx = \sqrt{x^2 - y^2} \, dx.$$

(b) Solve the following differential equation by changing the independent variable : 4

$(1 + x^2)^2 y'' + 2x (1 + x^2) y' + 4y = 0$.

(c) Find the general integral of the partial differential equation using Lagrange's method : 3

$p (z + e^x) + q (z + e^y) = z^2 - e^{x+y}$.

4. (a) A body whose temperature is initially 100°C is allowed to cool in air whose temperature remains constant at 20°C. Find the temperature of the body as a function of time t if it is observed that the body cools to 40°C in 10 minutes. 3

(b) Use Charpit's method to find the complete integral of the following partial differential equation 4

$$xp + 3yq = 2\ (z - x^2q^2).$$

(c) Solve the partial differential equation $(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)z = 4\ e^{x+y} \cos\ (x+y)$. 3

5. (a) A steel ball weighing 39.2 kg is suspended from a spring due to which the spring is stretched 2 m from its natural length. The ball is started in motion with no initial velocity by displacing it through 0.5 m above the equilibrium position. Assuming no air resistance, find an expression for the position of the ball at any time t. 4

(b) Solve the differential equation : 3

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + 2y = x \ln x$$

(c) Solve the partial differential equation : 3

$$(D^2 + 3DD' + 2D'^2)\ z = x + y.$$

6. (a) Find the temperature $u\ (x,\ t)$ of a homogeneous rod of length l. The rod is sufficiently thin so that heat is uniformly distributed over its cross-section at a given time t. The ends of the rod are insulated to prevent any loss of heat through the boundary and $u\ (x,\ 0) = f\ (x)$. 7

(b) Solve : 3

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\sin 2y = x^2 \cos^2 y$$

7. (a) Verify that the equation 4

$(2xz - yz)dx + (2yz - xz)dy - (x^2 - xy + y^2)dz = 0$

is integrable and find its integral.

(b) Solve the differential equation : 4

$(3x^2D^2 - 7xyDD' + 2y^2D'^2 + 3xD + 2yD')z = x^2y^3.$

(c) Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y + 1}$. 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-8 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न संख्या 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2x5=10

   (a) अवकल समीकरण

   $$(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$$

   यथातथा समीकरण है।

   (b) द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरण

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^3 - y$$

   का एक हल है जिसमें दो स्वेच्छ फलन शामिल है :

   (c) $(D^2 + 2DD' + D^2 + 2D + 2D' + 1)\ z = 0$ एक असमानेय आंशिक अवकल समीकरण है।

   (d) समीकरण $y'' - 2y' = e^x \sin x$ का विशेष समाकल $\frac{1}{2} e^x \sin x$ है।

(e) आंशिक अवकल समीकरण

$$\left(x^2 - 1\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

वृत $x^2 + y^2 = 1$ के बाहर के सभी (x, y) के लिए अतिपरवलयिक है।

2. (a) अवकल समीकरण 2

$3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$ को हल कीजिए।

(b) युगपत अवकल समीकरण 3

$$\frac{dx}{x\left(y^2 - z^2\right)} = \frac{dy}{-y\left(z^2 + x^2\right)} = \frac{dz}{z\left(x^2 + y^2\right)}$$

को हल कीजिए।

(c) प्राचल-विचरण विधि से निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए : 5

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = \frac{2}{1 + e^x}$$

3. (a) अवकल समीकरण : 3

$x \, dy - y \, dx = \sqrt{x^2 - y^2} \, dx$ को हल कीजिए।

(b) स्वतंत्र चर परिवर्तन विधि द्वारा निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 4

$(1 + x^2)^2 \, y'' + 2x \, (1 + x^2) y' + 4y = 0.$

(c) लागरेंज विधि का उपयोग करते हुए आंशिक अवकल समीकरण $p \, (z + e^x) + q \, (z + e^y) = z^2 - e^{x+y}$ का सामान्य समाकल ज्ञात कीजिए। 3

4. (a) एक पिण्ड जिसका आरंभ में तापमान 100°C है को 20°C के स्थिर तापमान वाली हवा में ठंडा होने दिया जाता है। यदि यह पाया जाए कि पिण्ड 10 मिनट में 40°C तक ठंडा होता है तब समय t के फलन के रूप में पिण्ड का तापमान ज्ञात कीजिए। 3

(b) चार्पिट–विधि द्वारा आंशिक अवकल समीकरण 4

$xp + 3yq = 2\ (z - x^2q^2)$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

(c) आंशिक अवकल समीकरण 3

$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)z = 4\ e^{x+y} \cos\ (x+y)$ को हल कीजिए।

5. (a) एक स्टील की गेंद जिसका भार 39.2 kg कि.ग्रा है, को एक कमानी से लटकाने पर कमानी की प्राकृतिक लंबाई में 2 m की वृद्धि हो जाती है। गेंद को विरामावस्था से 0.5 m की ऊँचाई से विस्थापित करके शून्य आदि वेग के साथ गतिमान किया गया। यह मानकर की वायु प्रतिरोध नहीं है, किसी भी समय t पर गेंद की गति का व्यंजक प्राप्त कीजिए। 4

(b) अवकल समीकरण : 3

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + 2y = x \ln x$$ को हल कीजिए।

(c) आंशिक अवकल समीकरण : 3

$(D^2 + 3DD' + 2D'^2)\ z = x + y$ को हल कीजिए।

6. (a) लंबाई l वाली एक समघात छड़ का तापमान $u(x, t)$ ज्ञात कीजिए। छड़ पर्याप्त मात्रा में पतली है जिससे कि किसी भी समय t पर अनुप्रस्थ काट पर ऊष्मा एक समान वितरित होती है। परिसीमा के द्वारा ऊष्मा की हानि को रोकने के लिए छड़ के सिरे विद्युत-रोधित हैं और $u(x, 0) = f(x)$. 7

(b) हल कीजिए : 3

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\sin 2y = x^2 \cos^2 y .$$

7. (a) जाँच कीजिए कि समीकरण : 4

$$(2xz - yz)dx + (2yz - xz)dy - (x^2 - xy + y^2)dz = 0$$

समाकलनीय है और इसका समाकल ज्ञात कीजिए।

(b) अवकल समीकरण : 4

$$(3x^2D^2 - 7xyDD' + 2y^2D'^2 + 3xD + 2yD')z = x^2y^3$$

को हल कीजिए।

(c) समीकरण : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y + 1}$ को हल कीजिए। 2