No. of Printed Pages : **11**

MTE–2

01149

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2010

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE–2 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Attempt any four questions from questions 2 to 7. No calculators are allowed.*

1. Which of the following statements are **True** ? Give reasons for your answers. **10**

(a) If A is a matrix such that $A^2 = \mathbf{0}$, then $A = \mathbf{0}$.

(b) The dimension of the vector space $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_2 + x_3 = x_1\}$ is two.

(c) $3 - i$ can be an eigen value of a Hermitian matrix.

(d) If k is a field, so is $k \times k$.

(e) $<, > : \mathbf{M}_3 (\mathbf{R}) \to \mathbf{R} : < A, B > = \det (AB)$ defines an inner product on $\mathbf{M}_3 (\mathbf{R})$.

2. (a) If $\{ u, v, w\}$ is a basis for a vector space V over F, Show that $\{ u+v, u+w, v+w\}$ also form a basis for V. 3

(b) Obtain the orthogonal canonical reduction of the quadratic form : 7

$$x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2.$$

Also obtain a set of principal axes for this form.

3. (a) Let a, b be elements of an inner product space (V, <, >) over **R**. 3

(i) If $a \perp b$, show that

$$\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2$$

(ii) Deduce that $\|a+b\|=\|a-b\|$ if $a \perp b$.

(b) Let T be the linear operator on $\mathbf{R}^3$, which is represented by : 4

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Find the characteristic and the minimal polynomials of T.

(c) Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ be defined by $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$. Find det T. Hence, check whether T is invertible or not. If it is, find its inverse. Otherwise re-define T so that it becomes invertible. 3

4\. (a) Consider in $\mathbf{R}^3$, 6

$$A = \{ (x, y, z) \mid x = y \}$$

and $B = \{ (x, y, z) \mid x + y = z \}$

check whether or not :

(i) A and B are subspaces of $\mathbf{R}^3$,

(ii) $\mathbf{R}^3 = A + B$;

(iii) $\mathbf{R}^3 = A \oplus B$.

(b) For $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, find Adj (A). Hence obtain its inverse. 4

5\. (a) Let the matrix of a linear transformation $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, relative to the standard ordered basis, be 5

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Find its matrix relative to the basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Can we use Cramer's Rule to solve the following system of linear equations ?

$$x + 4y + 2z = 3$$

$$3x - 3y + 6z = 5$$

$$2x + 5z = -4$$

Give reasons for your answer. If yes, solve it by this rule. Otherwise, use the Gaussian method of elimination to find the solution set. **5**

6. (a) Check whether $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ is diagonalisable or not. **4**

(b) Reduce $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ to its row echelon form. Hence obtain its determinant. **3**

(c) Check whether the operator $T : C^3 \to C^3$ given by $T(x, y, z) = (z, x, y)$, is **3**

(i) unitary ;

(ii) Hermitian.

7. (a) Let $T : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ be a linear operator defined by **2**

$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$.

Find its :

(i) null space and nullity ;

(ii) range space and rank.

(b) Find the radius of the circular section of the sphere $|r| = 13$, cut by the plane $r.\ (i + 2j - 2k) = 15$. **2**

(c) Prove that $P_4 / P_2 \simeq \mathbf{R}^2$, where P_n is the set of polynomials with real coefficient of degree $\leq n$. **6**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-2 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *प्रश्न संख्या 1 करना ज़रूरी है। प्रश्न संख्या 2 से 7 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलक्युलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन **सत्य** हैं और? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए। 10

   (a) अगर A एक ऐसा आव्यूह है कि $A^2 = 0$, तब $A = 0$ होगा।

   (b) सदिश समष्टि :
   $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_2 + x_3 = x_1\}$ की विमा दो है।

   (c) $3 - i$ हीर्मटी आव्यूह का आइगेन मान हो सकता है।

   (d) यदि k एक क्षेत्र है, तब $k \times k$ भी एक क्षेत्र है।

   (e) $<, > : \mathbf{M_3}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} : < A, B > = \det(AB)$, $\mathbf{M_3}(\mathbf{R})$ पर एक आंतर गुणनफल को परिभाषित करता है।

2. (a) यदि $\{u, v, w\}$, F पर सदिश समष्टि V के लिए एक आधार है, तब दिखाइए कि $\{u+v, u+w, v+w\}$ भी V के लिए आधार बनाता है। 3

(b) द्विघाती समघात : 7

$x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2$ का लांबिक विहित समानयन प्राप्त कीजिए।

इस समघात के लिए मुख्य अक्षों का समुच्चय भी प्राप्त कीजिए।

3. (a) मान लीजिए कि a, b, **R** पर आंतर गुणन समष्टि (V, <, >) के अवयव हैं। 3

(i) यदि $a \perp b$ है, तो दिखाइए कि $\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2$.

(ii) इसी की सहायता से सिद्ध कीजिए कि यदि $a \perp b$ हो, तो $\|a+b\|=\|a-b\|$ होगा।

(b) मान लीजिए कि $\mathbf{R}^3$ पर T एक रैखिक संकारक है, जो 4

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

से निरूपित है। T के अभिलक्षणिक तथा अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए।

(c) मान लीजिए $T : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$ द्वारा परिभाषित है। det T ज्ञात कीजिए। इस तरह जाँच कीजिए कि T व्युत्क्रमणीय है या नहीं। यदि यह व्युत्क्रमणीय है, तो इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। अन्यथा T को दुबारा इस तरह परिभाषित कीजिए जिससे कि वह व्युत्क्रमणीय बन जाए। 3

4\. (a) $\mathbf{R}^3$ में, 6

$$A = \{ (x, y, z) \mid x = y \} \text{ और}$$

$$B = \{ (x, y, z) \mid x + y = z \} \text{ लीजिए।}$$

जाँच कीजिए कि :

(i) A और B, $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टियाँ हैं या नहीं;

(ii) $\mathbf{R}^3 = A + B$;

(iii) $\mathbf{R}^3 = A \oplus B$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ के लिए, Adj (A) ज्ञात कीजिए। 4

इस तरह इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

5\. (a) मान लीजिए कि मानक क्रमित आधार के सापेक्ष, एक रैखिक रूपांतरण $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ का आव्यूह 5

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ है। आधार } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$$

के सापेक्ष इसका आव्यूह ज्ञात कीजिए।

(b) क्या निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल करने के लिए हम क्रेमर नियम का प्रयोग कर सकते हैं। 5

$$x + 4y + 2z = 3$$
$$3x - 3y + 6z = 5$$
$$2x + 5z = -4$$

अपने उत्तर के कारण बताइए। यदि ऐसा किया जा सकता है, तो इस नियम द्वारा इसे हल कीजिए। अन्यथा गाउसीय निराकरण विधि द्वारा हल समुच्चय ज्ञात कीजिए।

6. (a) जाँच कीजिए कि : 4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ विकर्णयनिय है या नहीं।

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ को पंक्ति सोपानक रूप में समानीत कीजिए। इस तरह इसका सारणिक प्राप्त कीजिए। 3

(c) जाँच कीजिए कि $T(x, y, z) = (z, x, y)$ द्वारा परिभाषित संकारक $T : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$, 3

(i) ऐकिक है या नहीं;

(ii) हर्मिटी है या नहीं।

7. (a) मान लीजिए $T : C^3 \to C^3$, $\qquad$ 2

$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$

द्वारा परिभाषित रैखिक संकारक है। T के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) शून्य समष्टि और शून्यता;

(ii) परिसर समष्टि और जाति।

(b) गोले $|r| = 13$ का समतल $r. (i + 2j - 2k) = 15$ से किए गए वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। $\qquad$ 2

(c) सिद्ध कीजिए कि $P_4/P_2 \simeq \mathbf{R}^2$, जहाँ P_n, घात $\leq n$ के वास्तविक गुणांकों वाले बहुपदों का समुच्चय है। $\qquad$ 6
