No. of Printed Pages : 8 **MTE-10**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

00408 **June, 2015**

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Answer any **five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. (a) The method

$$x_{n+1} = \frac{1}{9}\left[5x_n + \frac{5N}{x_n^2} - \frac{N^2}{x_n^5}\right], \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

where N is a positive constant, converges to $N^{1/3}$. Find the rate of convergence of the method. *5*

(b) Determine the spacing h in a table of equally spaced values of the function $f(x) = \sqrt{x}$ between 1 and 2, so that interpolation with a second degree polynomial in this table yields accuracy 5×10^{-6}. *5*

2. (a) Obtain the interpolating polynomial in simplest form which fits the following data : 5

x	– 3	– 1	1	3	5
f(x)	13	3	1	7	21

(b) Evaluate $\int_1^2 \frac{x\,dx}{x^2 + x + 1}$ using trapezoidal rule with 2 and 3 nodal points. Obtain the improved value using Romberg integration. 5

3. (a) Using Taylor's series method of second order with h = 0·1, obtain the approximate value of y(1·2) for the initial value problem $y' = x + y^2$, $y(1) = 2$. 5

(b) Find the inverse of the matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

using Gauss – Jordan method. Use partial pivoting, if necessary. 5

4\. (a) Errors in two successive approximations of a general linear iteration method

$$x_{k+1} = \phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

are given by $\varepsilon_{k+1} = A\,\varepsilon_k$, $\varepsilon_{k+2} = A\,\varepsilon_{k+1}$, where $\varepsilon_k = x_k - \xi$ and ξ is the exact root. Using this information, obtain a better estimate of the solution whenever three successive approximations are available. *4*

(b) Using three iterations of the inverse power method, find the eigenvalue nearest to 5·5, of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Assume the initial approximation to the eigenvector as $\mathbf{v}^{(0)} = [0{\cdot}6 \quad 0{\cdot}5]^T$. *6*

5\. (a) Using Graeffe's root squaring method, find an approximation to the largest real root (in magnitude) of the equation $x^3 + 5x^2 - x + 5 = 0$. Perform two iterations. *5*

(b) From the following table, find the number of students who obtained less than 55 marks, using interpolation : *5*

Marks	Number of Students
30 – 40	22
40 – 50	32
50 – 60	34
60 – 70	20
70 – 80	12

6. (a) Using Gerschgorin bounds, find the estimates of the eigenvalues of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Draw a rough sketch of the bounds. *5*

(b) Solve the initial value problem $y' = ty^2$, $y(1) = 2$ by classical Runge – Kutta method of order 4 for $t \in [1, 1\cdot2]$ with $h = 0\cdot2$. Find the magnitude of the error at $t = 1\cdot2$, if the exact solution is $y(t) = \dfrac{2}{2 - t^2}$. *5*

7. (a) A curve passes through the points (1, 0·2), (2, 0·7), (3, 1), (4, 1·3), (5, 1·5), (6, 1·7), (7, 1·9), (8, 2·1), (9, 2·3). Find the area bounded by the curve, x-axis, x = 1 and x = 9 using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule. *3*

(b) Show that $\Delta\nabla = \Delta - \nabla$. *2*

(c) Consider the following system of equations :

$$28x + 4y - z = 32$$
$$x + 3y + 10z = 24$$
$$2x + 17y + 4z = 35$$

Starting with $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ do one iteration of (i) Gauss – Seidel method, and (ii) Gauss – Jacobi method. *5*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2015
ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक निकटित कर सकते हैं । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) विधि

$$x_{n+1} = \frac{1}{9}\left[5x_n + \frac{5N}{x_n^2} - \frac{N^2}{x_n^5}\right],\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

जहाँ N एक धन अचर है, $N^{1/3}$ की ओर अभिसरित होती है । विधि की अभिसरण दर ज्ञात कीजिए । 5

(ख) फलन $f(x) = \sqrt{x}$ के समदूरी मानों की तालिका से 1 और 2 के बीच एक ऐसा अंतर h ज्ञात कीजिए जिससे कि इस तालिका से द्वितीय घात बहुपद के साथ अंतर्वेशन से 5×10^{-6} तक की परिशुद्धता प्राप्त हो जाए । 5

2. (क) निम्नलिखित आंकड़ों को आसंजित करने वाला अंतर्वेशन बहुपद सरलतम रूप में प्राप्त कीजिए : 5

x	– 3	– 1	1	3	5
f(x)	13	3	1	7	21

(ख) 2 और 3 सोपान (निस्पंद) बिंदु लेकर समलंबी नियम द्वारा समाकल $\int_{1}^{2} \frac{x\,dx}{x^2 + x + 1}$ का मान ज्ञात कीजिए । रॉम्बर्ग समाकलन द्वारा परिणाम में सुधार प्राप्त कीजिए । 5

3. (क) आदि मान समस्या

$$y' = x + y^2, \ \ y(1) = 2$$

के लिए h = 0·1 लेकर द्वितीय कोटि की टेलर श्रेणी विधि द्वारा y(1·2) का सन्निकट मान प्राप्त कीजिए । 5

(ख) गाउस – जॉर्डन विधि द्वारा आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । यदि आवश्यक हो, तो आंशिक कीलकन का प्रयोग कीजिए । 5

4. (क) एक व्यापक रैखिक पुनरावृत्ति विधि

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

के दो निरंतर सन्निकटनों में त्रुटि इस प्रकार दी गई हैं :

$$\varepsilon_{k+1} = A\,\varepsilon_k, \;\; \varepsilon_{k+2} = A\,\varepsilon_{k+1},$$

जहाँ $\varepsilon_k = x_k - \xi$ और ξ यथातथ मूल है । इस जानकारी का प्रयोग करके, परिणाम का एक बेहतर आकलन प्राप्त कीजिए जबकि तीन निरंतर सन्निकटन उपलब्ध हों । *4*

(ख) प्रतिलोम घात विधि की तीन पुनरावृत्तियों का प्रयोग करके, आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ के 5·5 के निकटतम आइगेनमान ज्ञात कीजिए । आइगेनसदिश का प्रारंभिक सन्निकटन $\mathbf{v}^{(0)} = [0{\cdot}6 \;\; 0{\cdot}5]^T$ मानकर चलिए । *6*

5. (क) ग्रैफे की मूल वर्गकरण विधि द्वारा समीकरण $x^3 + 5x^2 - x + 5 = 0$ के बृहतम् वास्तविक मूल (परिमाण में) का सन्निकटन ज्ञात कीजिए । विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए । *5*

(ख) अंतर्वेशन द्वारा निम्नलिखित सारणी से 55 अंक से कम अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए : *5*

अंक	छात्रों की संख्या
30 – 40	22
40 – 50	32
50 – 60	34
60 – 70	20
70 – 80	12

6. (क) गर्शगोरिन परिबंधों द्वारा आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमान आकलित कीजिए । परिबंधों का रेखांकन मोटे तौर पर कीजिए । 5

(ख) चतुर्थ कोटि चिरप्रतिष्ठित रुंगे – कुट्टा विधि द्वारा $h = 0{\cdot}2$ लेकर आदि मान समस्या $y' = ty^2$, $y(1) = 2$, जहाँ $t \in [1, 1{\cdot}2]$, का हल प्राप्त कीजिए । यदि यथातथ हल $y(t) = \dfrac{2}{2 - t^2}$ हो, तो $t = 1{\cdot}2$ पर त्रुटि का परिमाण ज्ञात कीजिए । 5

7. (क) एक वक्र (1, 0·2), (2, 0·7), (3, 1), (4, 1·3), (5, 1·5), (6, 1·7), (7, 1·9), (8, 2·1), (9, 2·3) बिंदुओं से होकर गुज़रता है । सिम्प्सन $\frac{1}{3}$ नियम का प्रयोग करके x-अक्ष, $x = 1$, $x = 9$ और वक्र से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 3

(ख) दिखाइए कि $\Delta\nabla = \Delta - \nabla$. 2

(ग) निम्नलिखित समीकरण निकाय को लीजिए :

$$28x + 4y - z = 32$$
$$x + 3y + 10z = 24$$
$$2x + 17y + 4z = 35$$

$\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ से प्रारम्भ करके (i) गाउस – सीडल विधि, और (ii) गाउस – जैकोबी विधि की एक-एक पुनरावृत्ति कीजिए । 5