No. of Printed Pages : 12

MTE-08

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

03888

June, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions from the remaining questions no. 2 to 7. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example. *5×2=10*

(a) The differential equation

$$x\,dx + y\,dy = \frac{a^2(x\,dy - y\,dx)}{(x^2 + y^2)}$$

is exact.

(b) The fundamental solutions for the differential equation

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

are x and $x\,ln\,x$.

(c) The primitive of the partial differential equation $\sqrt{p} + \sqrt{q} = 2x$, is

$$\frac{1}{6}(2x - a)^3 + a^2y + b.$$

(d) For all real values of x, the differential equation $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$, is elliptic.

(e) For the IVP, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, the continuity of f(x, y) and $\frac{\partial f}{\partial y}$ guarantees the unique solution of the problem.

2. Solve the following differential equations :

(a) $\frac{dy}{dx} + xy = y^2 e^{x^2/2} \cos x$ 3

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{12 \ln x}{x^2}$ 3

(c) $(D^2 + 2DD' + D'^2 + 2D + 2D' + 1) z = x$ 4

3. (a) The differential equation satisfied by a beam uniformly loaded at one end that is fixed and the other end is subjected to a tensile force P, is given by $EI\frac{d^2y}{dx^2} = Py - \frac{1}{2}Wx^2$, where E, I, P and W are constants. Show that the elastic curve for the beam under the conditions $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ at $x = 0$, is given by

$$y(x) = \frac{W}{P^2}(1 - \cosh nx) + \frac{W}{2P}\left(x^2 + \frac{2}{n^2}\right)$$

where $EI = \frac{P}{n^2}$. 4

(b) Solve : 3

$$(D^2 - D') z = \cos (3x - y)$$

(c) Solve the following simultaneous differential equations : 3

$$\frac{dx}{y^2(x-y)} = \frac{dy}{-x^2(x-y)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$$

4. (a) Solve : 3

$$xp^2 - (2x + 3y)\,p + 6y = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}$$

(b) Solve the following differential equation by reducing it to normal form : 4

$$y'' - 2\tan x\, y' + 5y = e^x \sec x$$

(c) Using the separation of variables technique, solve : 3

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2(x + y)\,u$$

5. (a) Solve : 3

$$2x\,dy - y(x + 1)\,dx + 6y^3\,dx = 0$$

(b) Solve, using the method of variation of parameters, the following differential equation : 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$$

(c) Find a homogeneous linear differential equation with constant coefficients that is satisfied by 2

$$x\,(e^{-x}\sin 2x + 3e^{-x}\cos 2x).$$

6. (a) Using the transformation $T = \frac{z^2}{2}$, reduce the equation

$$f(x, y, z, p, q) = x\,(y^2 + z^2q^2) - zy^2p = 0$$

to a form $f(P, x) = g(Q, y)$ where

$$P = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial T}{\partial y}.$$ 4

(b) Solve the differential equation

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 - y^2}\;dx.$$ 3

(c) Find the general integral of the partial differential equation using Lagrange's method

$$p\,(z + e^x) + q\,(z + e^y) = z^2 - e^{x+y}.$$ 3

7. (a) A tightly stretched string with fixed end points $x = 0$ and $x = l$ is initially in a position given by $y = y_0 \sin^3 \frac{\pi x}{l}$, and is released from rest from this position. Find the displacement $y(x, t)$ satisfying the governing equation $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ and the initial and boundary conditions. *6*

(b) Solve :

$$px^2 + 2qxy - pq - 2xz = 0$$ *4*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1 करना **अनिवार्य** है । शेष प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई **चार** प्रश्न कीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

(क) अवकल समीकरण

$$x\,dx + y\,dy = \frac{a^2(x\,dy - y\,dx)}{(x^2 + y^2)}$$

यथातथ है ।

(ख) x और $x \, ln \, x$ अवकल समीकरण

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

के मूलभूत हल हैं ।

(ग) आंशिक अवकल समीकरण $\sqrt{p} + \sqrt{q} = 2x$ का पूर्वग $\frac{1}{6}(2x - a)^3 + a^2y + b$ है ।

(घ) x के सभी वास्तविक मानों के लिए, अवकल समीकरण

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$$

दीर्घवृत्तीय है ।

(ङ) आदि मान समस्या

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$$

के लिए $f(x, y)$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ की सांतत्य, समस्या का अद्वितीय हल सुनिश्चित करती है ।

2. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(क) $\frac{dy}{dx} + xy = y^2 e^{x^2/2} \cos x$ 3

(ख) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{12 \ln x}{x^2}$ 3

(ग) $(D^2 + 2DD' + D'^2 + 2D + 2D' + 1) z = x$ 4

3. (क) एकसमान भारित एक धरन जिसका एक छोर स्थिर है और दूसरे छोर पर एक तनन बल P लग रहा है, अवकल समीकरण

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Py - \frac{1}{2}Wx^2$$

को संतुष्ट करता है, जहाँ E, I, P और W अचर हैं । दिखाइए कि प्रतिबंधों $y = 0$, $x = 0$ पर $\frac{dy}{dx} = 0$ के अधीन धरन के लिए प्रत्यास्थ वक्र निम्नलिखित समीकरण द्वारा प्राप्त होता है

$$y(x) = \frac{W}{P^2}(1 - \cosh nx) + \frac{W}{2P}\left(x^2 + \frac{2}{n^2}\right)$$

जहाँ $EI = \frac{P}{n^2}$. 4

(ख) हल कीजिए : 3

$$(D^2 - D') z = \cos (3x - y)$$

(ग) निम्नलिखित युगपत् अवकल समीकरणों को हल कीजिए : 3

$$\frac{dx}{y^2(x-y)} = \frac{dy}{-x^2(x-y)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$$

4. (क) हल कीजिए : 3

$$xp^2 - (2x+3y)\,p + 6y = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}$$

(ख) निम्नलिखित अवकल समीकरण

$$y'' - 2\tan x\, y' + 5y = e^x \sec x$$

को प्रसामान्य रूप में समानीत करके इसका हल प्राप्त कीजिए । 4

(ग) चर-पृथक्करण विधि द्वारा अवकल समीकरण

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2(x+y)\,u$$

का हल प्राप्त कीजिए । 3

5. (क) हल कीजिए : 3

$$2x\,dy - y(x+1)\,dx + 6y^3\,dx = 0$$

(ख) प्राचल विचरण विधि से निम्नलिखित अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$$

का हल प्राप्त कीजिए । 5

(ग) अचर गुणांकों वाला वह समघात रैखिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिसे

$$x(e^{-x}\sin 2x + 3e^{-x}\cos 2x)$$

संतुष्ट करता हो । 2

6. (क) रूपान्तरण $T = \frac{z^2}{2}$ द्वारा समीकरण

$$f(x, y, z, p, q) = x(y^2 + z^2q^2) - zy^2p = 0$$

को $f(P, x) = g(Q, y)$ रूप में समानीत कीजिए जहाँ $P = \frac{\partial T}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial T}{\partial y}$. 4

(ख) अवकल समीकरण

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 - y^2}\,dx$$

को हल कीजिए । 3

(ग) लग्रांज विधि द्वारा आंशिक अवकल समीकरण

$$p(z + e^x) + q(z + e^y) = z^2 - e^{x+y}$$

का व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए । 3

7. (क) एक खींची हुई डोरी जिसके सिरों को बिन्दुओं $x = 0$ और $x = l$ पर नियत कर दिया गया है, की अवस्था आरंभ में $y = y_0 \sin^3 \frac{\pi x}{l}$ है । यदि इसी अवस्था से विरामावस्था में इसे छोड़ा जाए, तो समीकरण $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ और आदि तथा सीमा प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाला डोरी का विस्थापन $y(x, t)$ ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) हल कीजिए :

$$px^2 + 2qxy - pq - 2xz = 0$$ *4*