No. of Printed Pages : 12

MTE-06

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

05308

Term-End Examination

June, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt **five** questions in all. Question no. 7 is **compulsory**. Answer any **four** questions from the rest. Use of calculator is **not** allowed.*

---

1. (a) Let

$$M_2(\mathbf{Q}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbf{Q} \right\}$$

be the ring of 2×2 matrices over $\mathbf{Q}$ with usual matrix addition and multiplication and let

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{Q}) \middle| \, a = d, c = 0 \right\}.$$

(i) Check that R is a subring of $M_2(\mathbf{Q})$. Is R commutative ? Justify your answer.

(ii) Let $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R \;\middle|\; a = d = 0 \right\}$.

Is I an ideal of R ? Justify your answer. 4

(b) If $\mathbf{Q}^*$ is the set of non-zero rational numbers and $*$ is an operation defined on $\mathbf{Q}^*$ by $a * b = \dfrac{ab}{3}$ for all $a, b \in \mathbf{Q}^*$, then show that $(\mathbf{Q}^*, *)$ is a group. 4

(c) List all the proper non-trivial subgroups of $\mathbf{Z}_{12}$. 2

2. (a) Prove that

$\dfrac{\mathbf{Q}[x]}{\langle x^2 + x + 1 \rangle}$ is a field extension of $\mathbf{Q}$. 3

(b) Does the ring $\dfrac{\mathbf{Z}_2[x]}{\langle x^8 + 1 \rangle}$ have nilpotent elements ? Justify your answer. 2

(c) Show that, a group of order 15 has a unique Sylow 3-subgroup and a unique Sylow 5-subgroup. Deduce that any group of order 15 is cyclic. *5*

3. (a) Find the greatest common divisor of $2x^2 + 7x + 3$ and $x^2 + 8x + 15$ in $\mathbf{Q}[x]$. *2*

(b) Let $\mathbf{R}^*$ be the group of non-zero real numbers under multiplication. Define

$\theta : GL_3(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*$ by $\theta(A) = \det(A)$ for all $A \in GL_3(\mathbf{R})$.

Show that θ is a homomorphism and deduce that $\dfrac{GL_3(\mathbf{R})}{SL_3(\mathbf{R})} \simeq \mathbf{R}^*$. *3*

(c) Let

$$R = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbf{Z}, n = 2^a 3^b, a \,.\, b \in \mathbf{Z}, a, b \geq 0 \right\}.$$

Check whether R is a ring under the usual addition and multiplication of rational numbers. Is it commutative ? Does it have an identity element ? Justify your answers. *5*

4\. (a) Is $A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ a transitive, reflexive and symmetric relation ? Justify your answer. *3*

(b) Let G be the group of non-zero complex numbers under multiplication. Let N be the set of complex numbers of absolute value 1. Show that N is a normal subgroup of G and G/N is isomorphic to the group of all positive real numbers under multiplication. *4*

(c) Show that, if G is a finite group containing an even number of elements, then there exists an element a in G such that $a \neq e$ and $a^2 = e$, where e is the identity element of G. *3*

5\. (a) Write out the multiplication table for the following set of matrices over $\mathbf{Q}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Check whether the set forms a group under matrix multiplication. *5*

(b) Show that an ideal I in $\mathbf{C}[x]$ is a prime ideal if and only if $I = \langle 0 \rangle$ or $I = \langle x - a \rangle$ for some $a \in \mathbf{C}$. 5

6. (a) Show that $\phi : \mathbf{C} \to M_2(\mathbf{R})$ defined by

$$\phi(a + ib) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbf{R}$$

is a homomorphism of rings. Also find the kernel of ϕ. 3

(b) Find the quotient field of the integral domain $\{\alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbf{Z}\}$. 3

(c) What is the characteristic of a field F containing 25 elements ? Also give the prime subfield of F. 2

(d) Give all the units of $\mathbf{Z}_{15}$. 2

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer. 10

(i) There is a field containing 10 elements.

(ii) The set of all odd integers is a group under addition.

(iii) If K, H, G are groups such that K is a normal subgroup of H and H is a normal subgroup of G, then K is a normal subgroup of G.

(iv) The map $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined by $f(a) = 2a$ for all $a \in \mathbf{R}$ is a ring homomorphism of rings.

(v) $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$ is a cyclic group.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए । प्रश्न सं. 7 करना **अनिवार्य** है । शेष प्रश्नों में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

1. (क) मान लीजिए

$$M_2(\mathbf{Q}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbf{Q} \right\}$$

Q पर सामान्य आव्यूह योग और गुणन वाले 2×2 आव्यूहों का वलय है और मान लीजिए

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{Q}) \middle| \, a = d, c = 0 \right\}.$$

(i) जाँच कीजिए कि R, $M_2(\mathbf{Q})$ का एक उपवलय है । क्या R क्रमविनिमेय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

(ii) मान लीजिए

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R \;\middle|\; a = d = 0 \right\}.$$

क्या I, R की एक गुणजावली है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *4*

(ख) यदि $\mathbf{Q}^*$ शून्येतर परिमेय संख्याओं का समुच्चय है और $*$, सभी $a, b \in \mathbf{Q}^*$ के लिए $a * b = \frac{ab}{3}$ द्वारा $\mathbf{Q}^*$ पर परिभाषित संक्रिया है, तब दिखाइए कि $(\mathbf{Q}^*, *)$ एक समूह है । *4*

(ग) $\mathbf{Z}_{12}$ के सभी उचित अतुच्छ उपसमूहों को सूचीबद्ध कीजिए । *2*

2. (क) सिद्ध कीजिए कि $\frac{\mathbf{Q}[x]}{\langle x^2 + x + 1 \rangle}$, $\mathbf{Q}$ का क्षेत्र-विस्तार है । *3*

(ख) क्या वलय $\frac{\mathbf{Z}_2[x]}{\langle x^8 + 1 \rangle}$ के शून्यंभावी अवयव हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *2*

(ग) दिखाइए कि कोटि 15 के समूह का अद्वितीय सीलो 3-उपसमूह और अद्वितीय सीलो 5-उपसमूह होता है । इस तरह निगमन कीजिए कि कोटि 15 का कोई भी समूह चक्रीय है । 5

3. (क) $\mathbf{Q}[x]$ में $2x^2 + 7x + 3$ और $x^2 + 8x + 15$ का महत्तम सार्व भाजक ज्ञात कीजिए । 2

(ख) मान लीजिए $\mathbf{R}^*$ गुणन के अधीन शून्येतर वास्तविक संख्याओं का समूह है । सभी $A \in GL_3(\mathbf{R})$ के लिए $\theta(A) = \det(A)$ द्वारा $\theta : GL_3(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*$ को परिभाषित कीजिए ।

दिखाइए कि θ एक समाकारिता है और इस तरह निगमन कीजिए कि $\frac{GL_3(\mathbf{R})}{SL_3(\mathbf{R})} \simeq \mathbf{R}^*$. 3

(ग) मान लीजिए

$$R = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbf{Z}, n = 2^a 3^b, a \,.\, b \in \mathbf{Z}, a, b \geq 0 \right\}.$$

जाँच कीजिए कि परिमेय संख्याओं के सामान्य योग और गुणन के अधीन R एक वलय है या नहीं । क्या यह क्रमविनिमेय है ? क्या इसका कोई तत्समक अवयव है ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । 5

4. (क) क्या $A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ संक्रामक, स्वतुल्य और सममित संबंध है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

(ख) मान लीजिए G, गुणन के अधीन शून्येतर सम्मिश्र संख्याओं का समूह है । मान लीजिए N निरपेक्ष मान 1 की सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है । दिखाइए कि N, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है और G/N गुणन के अधीन सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं के समूह के लिए तुल्याकारी है । 4

(ग) दिखाइए कि यदि G सम संख्या के अवयवों वाला एक परिमित समूह है, तब G में एक ऐसे अवयव a का अस्तित्व होता है जिसके लिए $a \neq e$ और $a^2 = e$, जहाँ e, G का तत्समक अवयव है । 3

5. (क) **Q** पर निम्नलिखित आव्यूह समुच्चय के लिए गुणन तालिका बनाइए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

जाँच कीजिए कि क्या यह समुच्चय आव्यूह गुणन के अधीन समूह बनाता है । 5

(ख) दिखाइए कि $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ में एक गुणजावली I एक अभाज्य गुणजावली है, यदि और केवल यदि $I = \langle 0 \rangle$ या $I = \langle x - a \rangle$, जहाँ $a \in \mathbf{C}$. 5

6. (क) दिखाइए कि

$\phi(a + ib) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित $\phi : \mathbf{C} \to M_2(\mathbf{R})$ वलयों की समाकारिता है । ϕ की अष्टि भी ज्ञात कीजिए । 3

(ख) पूर्णांकीय प्रांत $\{\alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbf{Z}\}$ का विभाग क्षेत्र ज्ञात कीजिए । 3

(ग) 25 अवयवों वाले क्षेत्र F का अभिलक्षणिक क्या है ? F का अभाज्य उपक्षेत्र भी बताइए । 2

(घ) $\mathbf{Z}_{15}$ के सभी मात्रक दीजिए । 2

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 10

(i) 10 अवयवों वाला एक क्षेत्र होता है ।

(ii) सभी विषम पूर्णांकों का समुच्चय योग के अधीन एक समूह है ।

(iii) यदि K, H, G ऐसे समूह हैं जिनके लिए K, H का प्रसामान्य उपसमूह है और H, G का प्रसामान्य उपसमूह है, तब K, G का प्रसामान्य उपसमूह है ।

(iv) $\mathbf{R}$ में सभी a के लिए $f(a) = 2a$ द्वारा परिभाषित प्रतिचित्र $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ वलयों की वलय समाकारिता है ।

(v) $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$ एक चक्रीय समूह है ।
