No. of Printed Pages : 8

MTE-02

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

06348

June, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Attempt any* ***four*** *questions from Questions no. 1 to 6. Question no. 7 is* ***compulsory****. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) Let $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ be an ordered basis of $\mathbf{R}^3$ with $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)$. Write the vector $v = (a, b, c)$ as a linear combination of the basis vectors from B. *4*

(b) Suppose $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, -2)$ and $\alpha_3 = (-1, -1, 0)$ are vectors in $\mathbf{R}^3$ and $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ is a linear functional such that $f(\alpha_1) = 1$, $f(\alpha_2) = -1$ and $f(\alpha_3) = 3$. If $\alpha = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, find $f(\alpha)$. *4*

(c) Show that the vectors $(3, 0, -3)$, $(-1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$ and $(4, 2, -2)$ are linearly dependent in $\mathbf{R}^3$. *2*

2. (a) Let $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be the linear operator defined by $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, -2x_2 - x_3)$. Let $f(x) = -x^3 + 2$. Find the operator $f(T)$. *4*

(b) Find the radius and the centre of the circular section of the sphere $|\mathbf{r}| = 4$ cut off by the plane $\mathbf{r} \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 3$. *4*

(c) Check whether the following matrix is orthogonal : *2*

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

3. (a) Let $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Find

(i) the characteristic polynomial of A.

(ii) the minimal polynomial of A.

(iii) the eigenvalues of A.

(iv) the eigenvectors of A. *6*

(b) Solve by Gaussian elimination method the following system of equations : *4*

$$x + y + z + t = 5$$
$$x - y + z + t = 1$$
$$x + z + t = 3$$

4. (a) State the Cayley – Hamilton theorem. Verify the theorem for the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$ 3

(b) Check whether the basis $B = \{(-1, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ is an orthogonal basis. Apply Gram – Schmidt orthogonalization process to B and obtain an orthonormal basis for $\mathbf{R}^3$ with respect to the standard inner product on $\mathbf{R}^3$. 5

(c) Let V be the subspace of $\mathbf{R}^3$ spanned by $\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ and $T : V \to V$ be defined by $T(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1, x_2)$. Find the kernel of T. 2

5. (a) If V is a finite dimensional vector space and $v \neq 0$ is a vector in V, show that there is a linear functional $f \in V^*$ such that $f(v) \neq 0$. 2

(b) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form

$$2x^2 + 5y^2 + 6xy - 2yz + 2z^2.$$

Also, determine its principal axes and signature. 8

6. (a) Find the adjoint of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -7 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Hence find its inverse. 5

(b) Let V be the vector space of 2×2 matrices over $\mathbf{R}$ and W_1, W_2 be subspaces of V defined by $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R} \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$. Find the dimensions of W_1, W_2 and $W_1 \cap W_2$. *5*

7. Which of the following statements are true and which are false ? Give reasons for your answer. *5×2=10*

(i) If V is a vector space, W_1, W_2 are subspaces of V, then $W_1 \cup W_2$ is a vector space.

(ii) For any real value of θ, the matrix $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ is invertible.

(iii) There is no 3×3 matrix for which the minimal polynomial is x^2.

(iv) If $< \alpha, \beta > = 0$ for all $\beta \in V$, V an inner product space, then $\alpha = 0$.

(v) The nullity of the linear transformation $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, defined by $T(x, y, z) = x + 2y + z$, is 2.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. 7 करना ज़रूरी है । कैलकुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) मान लीजिए $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\mathbf{R}^3$ का क्रमित आधार है जहाँ $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)$ । सदिश $v = (a, b, c)$ को B के आधार सदिशों के एकघात संचय के रूप में लिखिए । *4*

(ख) मान लीजिए $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, -2)$ और $\alpha_3 = (-1, -1, 0)$, $\mathbf{R}^3$ में सदिश हैं और $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ एक ऐसा रैखिक फलनक है जिसके लिए $f(\alpha_1) = 1$, $f(\alpha_2) = -1$ और $f(\alpha_3) = 3$. यदि $\alpha = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, तो $f(\alpha)$ ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) दिखाइए कि सदिश $(3, 0, -3)$, $(-1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$ और $(4, 2, -2)$, $\mathbf{R}^3$ में रैखिकत: आश्रित हैं । *2*

2. (क) मान लीजिए

$\mathbf{T} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, -2x_2 - x_3)$ द्वारा परिभाषित रैखिक संकारक है । मान लीजिए $f(x) = -x^3 + 2$. संकारक f(T) ज्ञात कीजिए । *4*

(ख) गोले $|\mathbf{r}| = 4$ के समतल $\mathbf{r} \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 3$ द्वारा किए गए वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या और केंद्र ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित आव्यूह लांबिक है या नहीं : *2*

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

3. (क) मान लीजिए

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

ज्ञात कीजिए

(i) A का अभिलक्षणिक बहुपद ।

(ii) A का अल्पिष्ठ बहुपद ।

(iii) A के आइगेनमान ।

(iv) A के आइगेनसदिश । *6*

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय को गाउसीय निराकरण विधि से हल कीजिए : *4*

$$x + y + z + t = 5$$
$$x - y + z + t = 1$$
$$x + z + t = 3$$

4. (क) कैले – हैमिल्टन प्रमेय का कथन दीजिए ।

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ के लिए इस प्रमेय को सत्यापित कीजिए । 3

(ख) जाँच कीजिए कि आधार $B = \{(-1, 1, 0,), (1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ एक लांबिक आधार है या नहीं । $\mathbf{R}^3$ पर मानक आंतर गुणनफल के सापेक्ष $\mathbf{R}^3$ के लिए लांबिक प्रसामान्य आधार प्राप्त करने के लिए B पर ग्राम – श्मिट लांबिकीकरण प्रक्रिया लागू कीजिए । 5

(ग) मान लीजिए V, $\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ द्वारा विस्तारित $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टि है और $T : V \to V$, $T(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1, x_2)$ द्वारा परिभाषित है । T की अष्टि ज्ञात कीजिए । 2

5. (क) यदि V एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है और $v \neq 0$, V में एक सदिश है, तो दिखाइए कि एक ऐसा रैखिक फलनक $f \in V^*$ होता है जिसके लिए $f(v) \neq 0$. 2

(ख) द्विघाती समघात $2x^2 + 5y^2 + 6xy - 2yz + 2z^2$ का लांबिक विहित समानयन ज्ञात कीजिए । इसके मुख्य अक्ष और चिह्नक भी निर्धारित कीजिए । 8

6. (क) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -7 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ के सहखंडज ज्ञात कीजिए । अतः इसका प्रतिलोम ज्ञात कीजिए । 5

(ख) मान लीजिए V, $\mathbf{R}$ पर 2×2 आव्यूहों की सदिश समष्टि है और W_1, W_2

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{R} \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$ द्वारा परिभाषित

V की उपसमष्टियाँ हैं । W_1, W_2 और $W_1 \cap W_2$ की विमाएँ ज्ञात कीजिए । *5*

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तर के कारण दीजिए । *5×2=10*

(i) यदि V एक सदिश समष्टि है, W_1, W_2, V की उपसमष्टियाँ हैं, तब $W_1 \cup W_2$ एक सदिश समष्टि है ।

(ii) θ के किसी वास्तविक मान के लिए, आव्यूह $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ व्युत्क्रमणीय है ।

(iii) कोई भी ऐसा 3×3 आव्यूह नहीं है जिसके लिए अल्पिष्ठ बहुपद x^2 है ।

(iv) यदि सभी $\beta \in V$ के लिए $< \alpha, \beta > = 0$, V एक आंतर गुणन समष्टि है, तब $\alpha = 0$.

(v) $T(x, y, z) = x + 2y + z$ द्वारा परिभाषित रैखिक रूपांतरण $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ की शून्यता 2 है ।
