

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**June, 2015**

01188

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50  
(Weightage : 70%)*

---

*Note : Attempt any **five** questions. All questions carry equal marks. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. (a) The population of fish in a reservoir is affected by both fishing and restocking. The proportionate birth rate is constant at 0.5 per year and proportionate death rate is constant at 0.6 per year. The reservoir is restocked at a constant rate of 3000 fishes per year and fishermen are allowed to catch 1500 fish per year. Using these assumptions, derive a model for the fish population and solve it. Describe the long term behaviour of the fish population when the initial population is 6000.

5

- (b) A particle falls from rest in a medium in which the resistance is  $\lambda v^2$  per unit mass. Prove that the distance fallen in time  $t$  is  $\frac{1}{\lambda} \cosh(t\sqrt{g\lambda})$ .

5

2. (a) The quarterly production of washing machines in a factory for three quarters were 2500, 2625 and 2850, respectively. Use exponential smoothing based upon the first three observations, to forecast production for the fifth period, using  $\alpha = 0.1$  and  $\beta = 0.2$ , where  $\hat{y} = \alpha + \beta x$  gives the best fitted line to the data relationship. From past data (prior to the three data points), a straight line was fit. The value on the line corresponding to the last observed time is 2450 and the slope is 90.

5

- (b) For wide arterial capillary, the length of the artery is 3 cm and radius  $6 \times 10^{-3}$  cm with driving force given by

$$P = P_1 - P_2 = 5 \times 10^3 \text{ dynes/cm}^2.$$

If arterial blood viscosity  $\mu = 0.027$  poise, find the shear stress on the wall. Also find the bounds for velocity distribution.

5

3. (a) A particle executes simple harmonic motion. Its velocities are 8 cm/sec and 6 cm/sec when it is at distances of 3 cm and 4 cm, respectively, from the mean position. Find its time period and maximum acceleration.

4

- (b) The sale in a mall since 2001 is given below :

Year	Sales (in ₹ lakhs)
2001	8
2002	10
2003	7
2004	11
2005	12
2006	9

What is the least square trend-line equation, using 2001 as the zero-year ?

6

4. (a) At any instant a particle is projected with a velocity  $u$  in a direction making an angle  $\alpha$  with the horizontal direction. After a certain interval  $t$ , the direction of its path makes an angle  $\beta$  with the horizontal direction. Prove that

$$u \cos \alpha = gt / (\tan \alpha - \tan \beta).$$

Further prove that direction of motion turns through an angle  $\theta$  in time  $[u \sin \theta / g \cos (\theta - \alpha)]$ .

5

- (b) The volume rate of flow  $Q$  of a liquid through a tube is supposed to depend on pressure drop per unit length, the diameter  $d$  of the tube and the viscosity  $\mu$ . Using dimensional analysis, show that  $Q = (\text{constant}) \times \left(\frac{d^4}{\mu}\right) \left(\frac{\Delta p}{l}\right)$ , where  $\Delta p$  is the change in pressure and  $l$  is the length of the tube.

3

- (c) The respiratory flow of air in the lungs is affected due to air pollution. If you have to model respiratory flow, write four essentials for the model.

2

5. (a) In a car garage, cars arrive at a rate of 36 cars per day. Assuming that inter-arrival time follows an exponential distribution and the service time distribution is also exponential with an average of 20 minutes, calculate the following :

4

- (i) Average number of cars in the queue.  
(ii) The probability that the queue size is greater than or equal to 6.

- (b) A model corresponding to the cooperative interaction between two species  $x$  and  $y$  is given by

$$\frac{dx}{dt} = (4 - 2x + y) x$$

$$\frac{dy}{dt} = (4 + x - 2y) y.$$

Find all the equilibrium points of the system and discuss the stability of the system at these points.

6

6. (a) Consider a logistically growing population. If the population is decreasing at a rate proportional to the population at that instant, formulate the modified logistic equation taking into account the effect of decrease. If the initial population is  $K$ , obtain the solution and discuss it as  $t \rightarrow \infty$ .

5

- (b) Consider the following cubic total cost function :

$$C = 0.04 q^3 - 0.8 q^2 + 10 q + 5$$

Assume that the price of  $q$  is 13 per unit. Find the output which yields maximum profit.

5

7. (a) In a certain culture of bacteria, the rate of increase is proportional to the number present. It is found that the number doubles in 4 hours. How many may be expected at the end of 12 hours? 2
- (b) Give difference between deterministic model and stochastic model. Give an example for each such model. 2
- (c) The return distribution on the 2 securities, A and B, is as follows :

Event (j)	Chance $P_{1j} = P_{2j}$	Return	
		$R_{1j}$	$R_{2j}$
1	0.33	19	18
2	0.25	17	16
3	0.17	11	11
4	0.25	10	9

Find which security is more risky in the Markowitz sense. 6

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. (क) मछली पकड़ने और पुनः स्थापन करने से जलाशय में मछलियों की संख्या पर प्रभाव पड़ता है । इसकी आनुपातिक जन्म-दर 0.5 प्रति वर्ष पर अचर है और आनुपातिक मृत्यु-दर 0.6 प्रति वर्ष पर अचर है । जलाशय का पुनः स्थापन 3000 मछली प्रति वर्ष की अचर दर से किया जाता है और मछुआरों को प्रति वर्ष 1500 मछली पकड़ने की अनुमति होती है । इन कल्पनाओं की सहायता से मछली समष्टि का निदर्श व्युत्पन्न कीजिए और उसे हल कीजिए । जब प्रारम्भिक समष्टि 6000 हो, तो मछली समष्टि के दीर्घकालिक व्यवहार का वर्णन कीजिए ।

5

(ख) एक कण माध्यम में विरामावस्था से नीचे गिरता है जिसमें प्रतिरोध  $\lambda v^2$  प्रति इकाई द्रव्यमान है। सिद्ध कीजिए कि गिरने में समय  $t$  में कण द्वारा तय की गई दूरी  $\frac{1}{\lambda} \cosh(t\sqrt{g\lambda})$  है।

5

2. (क) एक फैक्टरी में वॉशिंग मशीनों का तीन तिमाहियों में त्रैमासिक उत्पादन क्रमशः 2500, 2625 और 2850 था। प्रथम तीन प्रेक्षणों पर आधारित चरघातांकी मसृणीकरण से पाँचवी अवधि के उत्पादन का पूर्वानुमान लगाइए जबकि  $\alpha = 0.1$  और  $\beta = 0.2$ , जहाँ  $\hat{y} = \alpha + \beta x$  आँकड़ा सम्बन्ध के लिए सर्वोत्तम आसंजित रेखा को निरूपित करता है। पिछले आँकड़ों (तीन आँकड़ा बिन्दुओं से पहले) से एक सरल रेखा आसंजित की गई थी। रेखा पर अंतिम प्रेक्षित समय के संगत मान 2450 और प्रवणता 90 है।

5

(ख) चौड़ी धमनी केशिका के लिए, धमनी की लम्बाई 3 cm और त्रिज्या  $6 \times 10^{-3}$  cm है तथा चालक बल

$$P = P_1 - P_2 = 5 \times 10^3 \text{ dynes/cm}^2$$

द्वारा दिया गया है। यदि धमनी रक्त की श्यानता  $\mu = 0.027$  पॉयज़ है, तो दीवार पर अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए। वेग बंटन के लिए परिबंध भी ज्ञात कीजिए।

5



3. (क) एक कण की गति सरल आवर्त गति है। जब कण माध्य स्थिति से क्रमशः 3 cm और 4 cm की दूरी पर होता है, तो इसके वेग क्रमशः 8 cm/sec और 6 cm/sec होते हैं। इसका आवर्त-काल और अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिए।

4

- (ख) वर्ष 2001 से मॉल की बिक्री नीचे दी गई है :

वर्ष	बिक्री (लाख ₹ में)
2001	8
2002	10
2003	7
2004	11
2005	12
2006	9

वर्ष 2001 को शून्य-वर्ष मानकर न्यूनतम वर्ग उपनति रेखा समीकरण क्या है ?

6

4. (क) किसी भी क्षण, एक कण को क्षैतिज दिशा के साथ कोण  $\alpha$  बनाते हुए वेग  $u$  के साथ प्रक्षेपित किया गया। एक निश्चित अंतराल  $t$  के बाद कण के पथ की दिशा क्षैतिज दिशा के साथ कोण  $\beta$  बनाती है। सिद्ध कीजिए कि

$$u \cos \alpha = gt / (\tan \alpha - \tan \beta).$$

इसके आगे यह भी सिद्ध कीजिए कि गति की दिशा समय  $[u \sin \theta / g \cos (\theta - \alpha)]$  में कोण  $\theta$  से बदल जाती है।

5

(ख) नली से तरल के प्रवाह की आयतन दर  $Q$ , दाब गिरावट प्रति इकाई लम्बाई, नली के व्यास  $d$  और श्यानता  $\mu$  पर आधारित है। विमीय विश्लेषण द्वारा दिखाइए कि

$$Q = (\text{constant}) \times \left( \frac{d^4}{\mu} \right) \left( \frac{\Delta p}{l} \right), \text{ जहाँ } \Delta p \text{ दाब में}$$

परिवर्तन है और  $l$  नली की लम्बाई है।

3

(ग) साँस लेने के दौरान फेफड़ों में वायु का प्रवाह वायु प्रदूषण के कारण प्रभावित होता है। यदि आपको साँस लेने के प्रवाह का निदर्श करना हो, तो निदर्श के लिए चार अनिवार्य तथ्य लिखिए।

2

5. (क) एक कार के गैराज में, 36 कार प्रतिदिन की दर से कारें आती हैं। यह मानकर कि अंतर-आगमन समय एक चरघातांकी बंटन का अनुपालन करता है और सेवा काल बंटन भी 20 मिनट के औसत वाला चरघातांकी है, निम्नलिखित को परिकलित कीजिए :

4

- (i) पंक्ति में लगी कारों की औसत संख्या।
- (ii) पंक्ति का साइज़ 6 से अधिक या 6 के बराबर होने की प्रायिकता।

(ख) दो स्पीशीज़  $x$  और  $y$  के बीच सहकारी अन्वोन्यक्रिया का संगत निदर्श दिया गया है

$$\frac{dx}{dt} = (4 - 2x + y) x$$

$$\frac{dy}{dt} = (4 + x - 2y) y$$

निकाय के सभी साम्य बिन्दु ज्ञात कीजिए और इन बिन्दुओं पर निकाय के स्थायित्व की चर्चा कीजिए ।

6

6. (क) एक वृद्धिघात समष्टि लीजिए । यदि समष्टि में उस समय की समष्टि की समानुपाती दर से कमी हो रही है, तो कमी के प्रभावों को ध्यान में रखते हुए परिवर्तित वृद्धिघात समीकरण का सूत्रण कीजिए । यदि प्रारंभिक समष्टि  $K$  है, तो समीकरण का हल प्राप्त कीजिए और  $t \rightarrow \infty$  के लिए हल की चर्चा कीजिए ।

5

(ख) निम्नलिखित त्रिघात कुल लागत फलन लीजिए :

$$C = 0.04 q^3 - 0.8 q^2 + 10 q + 5$$

मान लीजिए कि  $q$  की कीमत प्रति इकाई 13 है । वह निर्गत ज्ञात कीजिए जिससे अधिकतम लाभ प्राप्त होता है ।

5

7. (क) बैक्टीरिया के एक विशिष्ट संवर्धन में, वृद्धि की दर वर्तमान संख्या की आनुपातिक है। यह पाया गया कि 4 घंटों में संख्या दुगुनी हो जाती है। 12 घंटों के बाद संख्या कितनी हो सकती है ? 2
- (ख) निर्धारणात्मक निदर्श और प्रसंभाव्य निदर्श के बीच अंतर बताइए। प्रत्येक निदर्श का एक-एक उदाहरण दीजिए। 2
- (ग) दो प्रतिभूतियों A और B के प्रतिफल बंटन नीचे दिए गए हैं :

घटना (j)	प्रायिकता $p_{1j} = p_{2j}$	प्रतिफल	
		$R_{1j}$	$R_{2j}$
1	0.33	19	18
2	0.25	17	16
3	0.17	11	11
4	0.25	10	9

मार्कोविट्ज़ रूप में कौन-सी प्रतिभूति ज़्यादा जोखिम पूर्ण होगी, ज्ञात कीजिए। 6