

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**June, 2015**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-01 : CALCULUS**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50*

*(Weightage 70%)*

---

**Note :** *Question no. 1 is compulsory. Attempt any four questions from Q. No. 2 to Q. No. 7. Use of calculators is not allowed.*

---

---

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answer, with a short proof or a counter-example.

10

(a) The function

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{if } -2 \leq x < 0 \\ x + 2 & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

is continuous at every point of  $[-2, 1]$ .

(b) The function  $f(x) = \sin 2\pi x$  is periodic with period 1.

- (c) The function  $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$ ,  $x \neq 0$  is a decreasing function for all  $x$ .

(d) 
$$\frac{d}{dx} \int_2^{\cos x} \sin^2 2t \, dt = \cos x \sin^2 (2 \cos x).$$

- (e) The curve  $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + 2xy + 3x + 4y = 7$  has only 2 asymptotes parallel to coordinate axes.

2. (a) Applying Trapezoidal rule, calculate the approximate value of  $\int_1^3 (x^2 + 1) \, dx$  taking 4 equal sub-intervals. 3

- (b) Evaluate : 3

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 2 \sin x + \cos x}$$

- (c) Check whether the rectangle of maximum area which can be inscribed in a circle is a square. 4

3. (a) Find the values of a and b so that the function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin^3 x}{3 \cos^2 x}, & \text{if } x < \pi/2 \\ a, & \text{if } x = \pi/2 \\ \frac{b(1 - \sin x)}{(\pi - 2x)^2}, & \text{if } x > \pi/2 \end{cases}$$

is continuous at  $x = \frac{\pi}{2}$ . 3

- (b) If  $y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$ , check whether

$$x^2 y_{n+2} + (2n + 1) x y_{n+1} + (n^2 - 1) y_n = 0$$

is true or not. Justify. 4

- (c) Evaluate : 3

$$\int_0^{\pi} x \sin^3 x \, dx$$

4. (a) Find  $\frac{dy}{dx}$ , if  $y = x^{\cos x} + (\cos x)^x$ . 4

- (b) Find the area included between the parabolas  $y^2 = 4x$  and  $x^2 = 4y$ . 3

- (c) If  $I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^n x \, dx$ , then prove that

$$(n - 1)(I_n + I_{n-2}) = 1. \quad \text{3}$$

5. (a) Differentiate  $\sin^{-1} x$  with respect to  $\cos^{-1} \sqrt{(1-x^2)}$ . 2

(b) Evaluate : 4

$$\int \frac{1+x^2}{1+7x^2+x^4} dx$$

(c) Find the equation of the tangent and the normal to the curve  $x^2 + y^2 + 4x + 3y - 25 = 0$  at  $(-3, 4)$ . 4

6. Trace the polar curve  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ , clearly stating all the properties used in tracing. 10

7. (a) Verify Rolle's theorem for the function  $f$ , defined by  $f(x) = \sin x + \cos x$  on  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . 3

(b) Evaluate : 3

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$$

(c) Show that  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  divides the length of the arch of the cycloid  $x = a(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = a(1 - \cos \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  in the ratio 1 : 3. 4

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य।  
प्रत्युदाहरण अथवा संक्षिप्त उपपत्ति की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

10

(क) फलन

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{यदि } -2 \leq x < 0 \\ x + 2 & \text{यदि } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$[-2, 1]$  के प्रत्येक बिन्दु पर संतत है।

(ख) फलन  $f(x) = \sin 2\pi x$  आवर्तक 1 वाला आवर्ती फलन है।

(ग)  $x$  के सभी मानों के लिए फलन

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4}, x \neq 0 \text{ एक हासमान फलन है।}$$

$$(घ) \frac{d}{dx} \int_2^{\cos x} \sin^2 2t dt = \cos x \sin^2 (2 \cos x).$$

(ङ) वक्र  $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + 2xy + 3x + 4y = 7$  के निर्देशक अक्षों के समान्तर केवल 2 अनंतस्पर्शी हैं।

2. (क) समलंबी नियम का प्रयोग करके, 4 बराबर के

$$\text{उप-अंतरालों में विभाजित करते हुए } \int_1^3 (x^2 + 1) dx$$

का सन्निकट मान परिकलित कीजिए।

3

$$(ख) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 2 \sin x + \cos x} \text{ का मूल्यांकन कीजिए।}$$

3

(ग) जाँच कीजिए कि एक वृत्त के अंदर बना अधिकतम क्षेत्रफल का आयत, वर्ग है।

4

3. (क) a और b के मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin^3 x}{3 \cos^2 x}, & \text{यदि } x < \pi/2 \\ a, & \text{यदि } x = \pi/2 \\ \frac{b(1 - \sin x)}{(\pi - 2x)^2}, & \text{यदि } x > \pi/2 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f,  $x = \frac{\pi}{2}$  पर संतत है। 3

(ख) यदि  $y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$ , तो जाँच कीजिए कि

$$x^2 y_{n+2} + (2n + 1) x y_{n+1} + (n^2 - 1) y_n = 0$$

सत्य है या नहीं। पुष्टि कीजिए। 4

(ग)  $\int_0^{\pi} x \sin^3 x \, dx$  का मूल्यांकन कीजिए। 3

4. (क)  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए यदि  $y = x^{\cos x} + (\cos x)^x$ . 4

(ख) परवलयों  $y^2 = 4x$  और  $x^2 = 4y$  के बीच घिरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3

(ग) यदि  $I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^n x \, dx$ , तो सिद्ध कीजिए कि

$$(n - 1)(I_n + I_{n-2}) = 1. \quad 3$$

5. (क)  $\cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$  के सापेक्ष  $\sin^{-1} x$  को अवकलित कीजिए । 2
- (ख)  $\int \frac{1+x^2}{1+7x^2+x^4} dx$  का मूल्यांकन कीजिए । 4
- (ग) वक्र  $x^2 + y^2 + 4x + 3y - 25 = 0$  के बिन्दु  $(-3, 4)$  पर स्पर्शी और अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए । 4
6. ध्रुवी वक्र  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  का अनुरेखण कीजिए । अनुरेखण में इस्तेमाल किए गए सभी गुणों को स्पष्ट रूप से बताइए । 10
7. (क)  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  पर  $f(x) = \sin x + \cos x$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  के लिए रोले प्रमेय की जाँच कीजिए । 3
- (ख)  $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$  का मूल्यांकन कीजिए । 3
- (ग) दर्शाइए कि  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  चक्रज  $x = a(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = a(1 - \cos \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  के चाप की लम्बाई को 1 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है । 4