

No. of Printed Pages : 16

**BMTC–132**

**BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)  
(BSCG)**

**Term-End Examination**

**June, 2024**

**BMTC-132 : DIFFERENTIAL EQUATIONS**

*Time : 3 Hours*

*Maximum Marks : 100*

---

**Note :** (i) *All questions in Section A and Section B are compulsory.*

(ii) *In Section C, do any **five** questions out of six questions.*

(iii) *Use of calculators is not allowed.*

---

---

**Section—A**

1. State whether the following statements are true or false. Give a short proof or a counter-example in support of your answer :  $10 \times 2 = 20$

(i)  $e^x$  and  $e^{-x}$  are linearly independent solutions of  $y'' - y = 0$ .

**P. T. O.**

- (ii) Direction cosines are connected by the relation :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2$$

- (iii) The spherical coordinates  $(2, \pi/4, \pi/3)$  are represented as  $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$  in cartesian co-ordinate system.

- (iv) For the function :

$$f(x, y) = x^3 - 4x^2y^2 + 8y^2,$$

$$f_{xxyy} = 0.$$

- (v) The function :

$$f(x, y) = \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$$

is not a homogeneous function.

- (vi) The differential equation :

$$\left[ 1 + (y')^2 \right]^{3/2} = y''$$

is a second order differential equation of degree one.

(vii) Differential equation obtained by eliminating the arbitrary constant  $c$  in the equation  $x^2 - y^2 = c^2$  is  $x dx - y dy = 0$ .

(viii) Solution of the total differential equation

$$yz dx + 2zx dy - 3xy dz = 0$$

$$\text{is } xy^2 = cz^3.$$

(ix) Solution of the differential equation :

$$(D^3 - D^2 - 12D)y = 0$$

$$\text{is } y = (c_1 + c_2 e^{4x}) + c_3 e^{-3x}.$$

(x) Integrating factor for the differential equation :

$$(x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0, \quad x > 0, y > 0$$

$$\text{is } \frac{1}{x^2}.$$

### Section—B

2. (a) Solve the differential equation : 4

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \log y = \frac{y}{x^2} (\log y)^2$$

- (b) Show that the differential equation : 6

$$(y + z)dx + dy + dz = 0$$

is integrable and find its integral.

3. (a) Solve the differential equation : 5

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 20y = (x + 1)^2$$

- (b) Solve the differential equation : 5

$$(4x + 6y + 5)dy = (3y + 2x + 5)dx$$

4. (a) Find the equation of the line joining the points  $(-1, 0, 1)$  and  $(1, 2, 3)$ . 2

- (b) Check whether the limits of the following functions exist or not as  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  : 3

$$f(x, y) = \frac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$$

- (c) State Euler's theorem for homogeneous functions and verify it for the function : 5

$$u = \frac{x^3 + y^3}{x + y}$$

## Section—C

5. (a) Using Charpit's method, find the complete integral of the differential equation : 7

$$p^2x + q^2y = z$$

- (b) Find partial derivatives  $f_x$  and  $f_y$  for the function : 3

$$f(x, y) = 5x^4y^2 + 6x^2y^3$$

at the point  $(1, -1)$ .

6. (a) The population of a town grows at a rate proportional to the population at any time. Its initial population of 500 increases by 15% in 10 years. What will be the population in 30 years ? 6
- (b) Show that the following function is not continuous at  $(0, 0)$  : 4

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{y}, & x \neq 0, y \neq 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

7. (a) Solve : 5

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{-y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$$

(b) Solve : 5

$$x \frac{d^2y}{dx^2} - (2x - 1) \frac{dy}{dx} + (x - 1)y = 0 ,$$

when  $y = e^x$  is a solution.

8. (a) Solve the following differential equation by using the method of undetermined coefficients : 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 4x^2$$

(b) Solve by the use of variation of parameters : 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$$

9. (a) If :

5

$$u = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y},$$

then show that :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

(b) Find the envelope of the family of circles : 5

$$x^2 + y^2 - 2ax \cos \alpha - 2ay \sin \alpha + c^2 = 0,$$

where  $\alpha$  is a parameter.

10. (a) Find the level surface of the following for the value given against it : 2

(i)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 24$  for  $k = 1$

(ii)  $f(x, y, z) = x + y - z + 3$  for  $k = 2$

(b) Find the differential equations of the space curve in which the two families of surfaces : 4

$$u = x^2 - y^2 = c_1$$

and

$$v = y^2 - z^2 = c_2,$$

intersect.

(c) For the function :

$$f(x, y) = 2x^3y^3 + 4xy^3 - x + y,$$

find the polynomial given by : 4

$$f_{xx}(1, 1)(x-1)^2 + f_{xy}(1, 1)(x-1)(y-1) \\ + f_{yy}(1, 1)(y-1)^2$$



**BMTC-132**

विज्ञान स्नातक ( सामान्य ) ( बी. एस-सी. जी. )

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

बी.एम.टी.सी.-132 : अवकल समीकरण

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

---

नोट : (i) अनुभाग 'अ' और अनुभाग 'ब' में सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) अनुभाग 'स' में, छः प्रश्नों में से किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

(iii) कैलकुलेटर्स के उपयोग की अनुमति नहीं है।

---

**अनुभाग-अ**

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य।  
अपने उत्तर के समर्थन में एक संक्षिप्त उपपत्ति या एक प्रति-उदाहरण दीजिए : 10×2=20

(i)  $e^x$  और  $e^{-x}$  समीकरण  $y'' - y = 0$  के रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं।

- (ii) दिक् कोज्याएँ सम्बन्ध  $l^2 + m^2 + n^2 = 2$  द्वारा सम्बन्धित होती हैं।
- (iii) गोलीय निर्देशांकों  $(2, \pi/4, \pi/3)$  को कार्तीय निर्देशांक पद्धति में  $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$  के रूप में निरूपित किया जाता है।
- (iv) फलन  $f(x, y) = x^3 - 4x^2y^2 + 8y^2$  के लिए,  $f_{xxyy} = 0$  है।
- (v) फलन  $f(x, y) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$  एक समघात फलन नहीं है।
- (vi) अवकल समीकरण  $[1 + (y')^2]^{3/2} = y''$  घात की एक की द्वितीय कोटि का अवकल समीकरण है।
- (vii) समीकरण  $x^2 - y^2 = c^2$  में से स्वेच्छ अचर  $c$  को विलोपित करने पर प्राप्त अवकल समीकरण  $x dx - y dy = 0$  है।
- (viii) सम्पूर्ण अवकल समीकरण :

$$yz dx + 2zx dy - 3xy dz = 0$$

का हल  $xy^2 = cz^3$  है।

(ix) अवकल समीकरण  $(D^3 - D^2 - 12D)y = 0$  का

हल  $y = (c_1 + c_2 e^{4x}) + c_3 e^{-3x}$  का है।

(x) अवकल समीकरण :

$$(x^2 + y^2)dx - 2xy dy = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$$

के लिए समाकलन गुणक  $\frac{1}{x^2}$  है।

### अनुभाग-ब

2. (अ) अवकल समीकरण :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \log y = \frac{y}{x^2} (\log y)^2$$

को हल कीजिए।

4

(ब) दर्शाइए कि अवकल समीकरण :

$$(y + z)dx + dy + dz = 0$$

समाकलनीय है तथा इसका समाकल ज्ञात

कीजिए।

6

3. (अ) अवकल समीकरण : 5

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 20y = (x + 1)^2$$

को हल कीजिए।

- (ब) अवकल समीकरण : 5

$$(4x + 6y + 5)dy = (3y + 2x + 5)dx$$

को हल कीजिए।

4. (अ) बिन्दुओं  $(-1, 0, 1)$  और  $(1, 2, 3)$  को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

- (ब) जाँच कीजिए कि  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  होने पर, फलन

$$f(x, y) = \frac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$$

की सीमा का अस्तित्व है या

नहीं। 3

- (स) समघात फलनों के लिए, ऑयलर प्रमेय का कथन

$$\text{लिखिए तथा फलन } u = \frac{x^3 + y^3}{x + y} \text{ के लिए}$$

उसका सत्यापन कीजिए। 5

## अनुभाग-ग

5. (अ) चारपिट विधि का उपयोग करते हुए, अवकल समीकरण  $p^2x + q^2y = z$  का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए। 7

(ब) बिन्दु  $(1, -1)$  पर फलन  $f(x, y) = 5x^4y^2 + 6x^2y^3$  के लिए, आंशिक अवकलज  $f_x$  और  $f_y$  ज्ञात कीजिए। 3

6. (अ) एक शहर की जनसंख्या में किसी (उस) समय की जनसंख्या के समानुपात की दर पर वृद्धि होती है। उसकी प्रारम्भिक जनसंख्या 500 में 10 वर्षों में 15% वृद्धि हो जाती है। 30 वर्षों में यह जनसंख्या कितनी हो जाएगी ? 6

(ब) दर्शाइए कि फलन : 4

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{y}, & x \neq 0, y \neq 0 \\ 1, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

बिन्दु  $(0, 0)$  पर संतत नहीं है।

7. (अ)  $\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{-y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$  को

हल कीजिए। 5

(ब)  $x \frac{d^2y}{dx^2} - (2x - 1) \frac{dy}{dx} + (x - 1)y = 0$  को हल

कीजिए, जब  $y = e^x$  एक हल है। 5

8. (अ) निर्धारित गुणांकों की विधि के उपयोग द्वारा,  
अवकल समीकरण :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 4x^2$$

को हल कीजिए।

(ब) प्राचलों के विचरण की विधि के उपयोग द्वारा :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$$

को हल कीजिए। 5

9. (अ) यदि : 5

$$u = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y}$$

है, तो दर्शाइए कि :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

(ब) वृत्तों : 5

$$x^2 + y^2 - 2ax \cos \alpha - 2ay \sin \alpha + c^2 = 0$$

के कुल का अन्वालोप (लिफाफा) ज्ञात कीजिए,  
जहाँ  $\alpha$  प्राचल है।

10. (अ) निम्नलिखित में से प्रत्येक का, उसके सम्मुख दिए

गए मान पर, स्तर पृष्ठ ज्ञात कीजिए : 2

(i)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 24$ ,  $k = 1$  के  
लिए

(ii)  $f(x, y, z) = x + y - z + 3$ ,  $k = 2$  के लिए

(ब) उन समष्टि वक्रों के अवकल समीकरण ज्ञात

कीजिए, जिनमें पृष्ठों : 4

$$u = x^2 - y^2 = c_1$$

और

$$v = y^2 - z^2 = c_2$$

के दो कुल प्रतिच्छेद करते हैं।

(स) फलन  $f(x, y) = 2x^3y^3 + 4xy^3 - x + y$  के  
लिए, 4

$$f_{xx}(1, 1)(x-1)^2 + f_{xy}(1, 1)(x-1)(y-1) \\ + f_{yy}(1, 1)(y-1)^2$$

द्वारा दिए जाने वाला बहुपद ज्ञात कीजिए।