No. of Printed Pages : 16 **MTE-12**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2023

Elective Course : Mathematics

MTE-12 : LINEAR PROGRAMMING

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *(i) Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(ii) Answer any ***four*** *questions from question nos.* ***2*** *to* ***7****.*

(iii) Use of calculator is not allowed.

---

1. Which of the following statements are True and which are False ? Give a short proof or a counter-example in support of your answers : 5×2=10

   (i) If S_1 and S_2 are two convex sets, then their intersection is also a convex set.

   (ii) Dual of a dual is a primal problem.

(iii) A saddle point in a game is the point of intersection of the optimal pure strategies of the two players.

(iv) The vectors $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ constitute a basis for E^3.

(v) The solution to a transportation problem with m-rows and n-columns is feasible, if number of positive allocations is $m + n$.

2. (a) Solve the following linear programming problem by Simplex method : 5

Maximize :

$$Z = x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

Subject to :

$$3x_1 + 3x_3 \le 22$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 14$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 14$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

(b) Solve the following cost minimising assignment problem : 5

	I	II	III	IV	V
A	2	9	2	7	1
B	6	8	7	6	1
C	4	6	5	3	1
D	4	2	7	3	1
E	5	3	9	5	1

3. (a) In a game of two players, given the payoff matrix for player A, obtain the optimum strategies for both the players and determine the value of the game : 4

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Player B} \\
\text{Player A} & \begin{pmatrix} 6 & -3 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

(b) Solve the following transportation problem to maximize profit : 6

Destination

		I	II	III	IV	Supply
	A	40	25	22	33	100
Source	B	44	35	30	30	30
	C	38	38	28	30	70
	Demand	40	20	60	30	

4. (a) Convert the following game problem involving two person zero-sum game in an equivalent linear programming problem : 5

Player B

Player A	8	20	– 3	1
	6	25	4	2
	0	– 8	12	9
	16	9	21	0

(b) Write the mathematical model of the following transportation problem : 5

		Distribution Centre				
		D_1	D_2	D_3	D_4	Capacity
	P_1	19	30	50	12	7
Plant	P_2	70	30	40	60	10
	P_3	40	10	60	20	18
	Demand	5	8	7	15	

5. (a) A firm plans to purchase at least 200 kg of scrap containing high quality metal X and low quality metal Y. It decided that the scrap to be purchased must contain at least 100 kg of X-metal and not more than 35 kg of Y-metal. The firm can purchase the scrap from two suppliers (A and B) in unlimited quantities. The percentage of X and Y metals in terms of weight in the scrap supplied by A and B is given ahead :

Metals	Supplier A	Supplier B
X	25%	75%
Y	10%	20%

The price of A's scrap is ₹ 200 per kg and that of B is ₹ 400 per kg. The firm wants to determine the quantities that it should buy from the two suppliers so that the total cost is minimized. Formulate the problem as LPP and solve. 6

(b) Write the dual of the following linear programming problem : 4

Minimize :

$$Z = x_1 + x_2 + x_3$$

Subject to :

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$$2x_2 - x_3 \geq 4$$

$x_1, x_2 \geq 0, x_3$ is unrestricted.

Your dual must contain one unrestricted variable.

6. (a) Check whether the following system of linear equations has degenerate solutions :

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

If yes, find all the degenerate basic feasible solutions. 4

(b) Using two-phase method, solve the following linear programming problem : 6

Minimize :

$$Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

Subject to :

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$$

$$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$

$$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

7. (a) Solve the following game using graphical method : 6

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ \text{A} & \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Which of the following sets are convex ? 4

(i) $S_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

(ii) $S_2 = \{(x, y) \mid x \geq 3, y \leq 5\}$

Verify your result by drawing the graph.

MTE-12

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-12 : रैखिक प्रोग्रामन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *(i) प्रश्न सं.* ***1*** *अनिवार्य है।*

(ii) प्रश्न सं. ***2*** *से* ***7*** *तक कोई* ***चार*** *प्रश्न कीजिए।*

(iii) कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति **या** प्रति-उदाहरण दीजिए : $5 \times 2 = 10$

   (i) यदि S_1 और S_2 दो अवमुख समुच्चय हैं, तो उनका सर्वनिष्ठ भी अवमुख समुच्चय होता है।

(ii) द्वैती की द्वैती एक आद्य समस्या होती है।

(iii) एक खेल में, दोनों खिलाड़ियों की इष्टतम अविकल्पी युक्तियों का सर्वनिष्ठ बिन्दु पल्याण बिन्दु होता है।

(iv) सदिश $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ और $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ आधार E^3 बनाते हैं।

(v) m–पंक्तियों और n–स्तम्भों वाली परिवहन समस्या का हल संगत होगा, यदि धनात्मक आबंटनों की संख्या $m + n$ है।

2. (क) एकधा विधि द्वारा निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए : 5

अधिकतमीकरण कीजिए :

$$Z = x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

जबकि :

$$3x_1 + 3x_3 \leq 22$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 14$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(ख) निम्नलिखित न्यूनतम लागत नियतन समस्या को हल कीजिए : 5

	I	II	III	IV	V
A	2	9	2	7	1
B	6	8	7	6	1
C	4	6	5	3	1
D	4	2	7	3	1
E	5	3	9	5	1

3. (क) दो खिलाड़ियों के एक खेल में खिलाड़ी A के लिए भुगतान आव्यूह दिया गया है। दोनों खिलाड़ियों के लिए इष्टतम युक्तियाँ प्राप्त कीजिए और खेल का मान भी निकालिए : 4

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

(ख) अधिकतम लाभ के लिए निम्नलिखित परिवहन समस्या को हल कीजिए : 6

गंतव्य

		I	II	III	IV	पूर्ति
	A	40	25	22	33	100
स्रोत	B	44	35	30	30	30
	C	38	38	28	30	70
	माँग	40	20	60	30	

4. (क) निम्नलिखित द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल समस्या को तुल्य रैखिक प्रोग्रामन समस्या में परिवर्तित कीजिए : 5

खिलाड़ी B

खिलाड़ी A	8	20	– 3	1
	6	25	4	2
	0	– 8	12	9
	16	9	21	0

(ख) निम्नलिखित परिवहन समस्या को गणितीय निदर्श के रूप में लिखिए : 5

वितरण केन्द्र

		D_1	D_2	D_3	D_4	क्षमता
	P_1	19	30	50	12	7
संयंत्र	P_2	70	30	40	60	10
	P_3	40	10	60	20	18
	माँग	5	8	7	15	

5. (क) एक फर्म उच्च गुणवत्ता धातु X और कम गुणवत्ता धातु Y युक्त स्क्रैप के कम-से-कम 200 kg की खरीद करने की योजना बनाती है। यह निर्णय लेती है कि खरीदी जाने वाली स्क्रैप में धातु X के कम-से-कम 100 kg और धातु Y के 35 kg से अधिक नहीं होने चाहिए। फर्म दो आपूर्तिकर्ताओं (A और B) से असीमित मात्रा में स्क्रैप खरीद सकती है। A और B के द्वारा आपूर्ति की गई स्क्रैप के वजन में धातुओं X और Y की प्रतिशतता अग्रलिखित है :

धातु	आपूर्तिकर्ता A	आपूर्तिकर्ता B
X	25%	75%
Y	10%	20%

A की स्क्रैप की कीमत ₹ 200 प्रति kg और B की स्क्रैप की कीमत ₹ 400 प्रति kg है। फर्म दोनों आपूर्तिकर्ताओं से खरीदे जाने वाली स्क्रैप की वह मात्रा जानना चाहती है जिससे कि कुल लागत न्यूनतम हो। इसे एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रित कीजिए और हल कीजिए। 6

(ख) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती लिखिए : 4

न्यूनतमीकरण कीजिए :

$$Z = x_1 + x_2 + x_3$$

जबकि :

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 3$$
$$2x_2 - x_3 \geq 4$$

$x_1, x_2 \geq 0, x_3$ अप्रतिबंधित है।

आपकी द्वैती में एक अप्रतिबंधित चर होना आवश्यक है।

6. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय का अपभ्रष्ट हल है :

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

यदि हाँ, तो सभी अपभ्रष्ट आधारी सुसंगत हल ज्ञात कीजिए। 4

(ख) द्वि–चरण विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए : 6

न्यूनतमीकरण कीजिए :

$$Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

जबकि :

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$$
$$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$
$$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

7. (क) ग्राफीय विधि द्वारा निम्नलिखित खेल को हल कीजिए : 6

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ \text{A} & \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

(ख) निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन-से समुच्चय अवमुख हैं ? 4

(i) $S_1 = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\right\}$

(ii) $S_2 = \left\{(x, y) \mid x \geq 3, y \leq 5\right\}$

ग्राफ खींचकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।