

No. of Printed Pages : 8

MTE-07

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2023

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Attempt any **four** questions out of the remaining questions **2 to 7**.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answers. $5 \times 2 = 10$

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 0.$

(b) The curve of intersection of the plane $y = 2$ and the surface $z = 2x^2 + 3y^2$ passes through the point $(1, 2, 14)$.

P. T. O.

- (c) Directional derivative of a function f of two variables at $(2, 0)$ in the direction of the x -axis is the partial derivative $f_y(2, 0)$.
- (d) The transformation $F(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ is locally invertible at the point $(1, 1)$.
- (e) Let f be a real valued function defined by $f(x, y) = x + y$ on a domain D . Then the line integral $\int_C dx + dy$ is independent of paths in the domain D .

2. (a) Prove that : 4

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 - 3y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

- (b) Find the third Taylor polynomial of the function e^{2x+5y} at the point $(0, 0)$. 4
- (c) Let $e = (1, 0)$ and $f = (0, 1)$ in \mathbf{R}^2 . Find $|3x - 5y|$, where $x = 2e + 3f$ and $y = 5f$. 2

3. (a) Find $\frac{du}{dx}$ for $u = \cos(x^2 + y^2)$, where x and y satisfy the equation $3x^2 + 7y^2 = 1$. 3

- (b) Verify the chain rule for the Jacobian for the following functions : $u = e^{x+y}$, $v = e^{y+z}$, $w = e^{z+x}$ where $x = r$, $y = s^2$, $z = t^3$. 5
- (c) Find the domain of the real valued function f of three variables given by $f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$ and evaluate the function at $(1, -2, 3)$. 2
4. (a) Find the volume of the solid whose base is a triangle in the xy -plane bounded by the y -axis, the lines $y = 2x$ and $y = 2$, while the top of the solid is in the plane $z = 5 - x - y$. 6
- (b) Evaluate the following limits : 4
- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} 5x \sin \frac{1}{5x}$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 7x^4 + 10x^3 + 3}{5x^7 + 1}$
5. (a) Compute $\iiint_W y \, dx \, dy \, dz$, where W is the region given by $x = 0$, $y = 0$, $z = 7$ and the surface $z = x^2 + y^2$. 6
- (b) Show that the function $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3 + 3xy^2$ has a stationary point at $(0, 0)$ but has no local extreme value at $(0, 0)$. 4

6. (a) Let $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ be a function defined by $f(x, y) = x^2 + y$. Check whether $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ at every point (a, b) of the domain of f . 2
- (b) Find the functional selection for the pair of the following functions :

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x}, \quad g(x, y) = \frac{x - y^2}{2x + 3y^2}.$$

Deduce that f and g are functionally dependent. 3

- (c) Evaluate the following repeated integral by reversing the order of integration : 5

$$\int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} xy \, dy \right) dx.$$

7. (a) Calculate the work done by a force $F = (x^2y, xy^2)$ in moving a particle from $(0, 0)$ to $(1, 1)$ along the line $y = x$. 4
- (b) Let $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ be defined by :

$$f(x, y) = |x - 1| + |y|.$$

Check whether f is continuous at the point $(0, 0)$. Calculate the partial derivatives at the point $(0, 0)$, if they exist. 6

MTE-07

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न सं. 2 से 7 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों की पुष्टि कोजिए : $5 \times 2 = 10$

(क) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 0$

(ख) समतल $y = 2$ और पृष्ठ $z = 2x^2 + 3y^2$ के प्रतिच्छेद का वक्र, बिन्दु $(1, 2, 14)$ से होकर गुजरता है।

- (ग) x -अक्ष की दिशा में $(2, 0)$ पर दो चरों के फलन f का दिक् अवकलज, आंशिक अवकलज $f_y(2,0)$ है।
- (घ) रूपांतरण $F(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ बिन्दु $(1, 1)$ पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है।
- (ङ) मान लीजिए f प्रांत D पर $f(x, y) = x + y$ द्वारा परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। तब रेखा समाकल $\int_C dx + dy$ प्रांत D में पथ-स्वतंत्र है।

2. (क) सिद्ध कीजिए : 4

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 - 3y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

- (ख) बिन्दु $(0, 0)$ पर फलन e^{2x+5y} का तृतीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 4

- (ग) मान लीजिए \mathbf{R}^2 में $e = (1, 0)$ और $f = (0, 1)$ । $|3x - 5y|$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $x = 2e + 3f$ और $y = 5f$ । 2

3. (क) $u = \cos(x^2 + y^2)$ के लिए $\frac{du}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ x और y समीकरण $3x^2 + 7y^2 = 1$ को सन्तुष्ट करते हैं। 3

(ख) निम्नलिखित फलनों के जैकोबियन के लिए
जुंखला नियम सत्यापित कीजिए :

$$u = e^{x+y}, v = e^{y+z}, w = e^{z+x}$$

जहाँ $x = r, y = s^2, z = t^3$ । 5

(ग) $f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$ द्वारा परिभाषित तीन

चरों के वास्तविक मान फलन f का प्रांत ज्ञात
कीजिए और $(1, -2, 3)$ पर फलन का
मूल्यांकन कीजिए। 2

4. (क) एक घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका
आधार xy -समतल में y -अक्ष और रेखाएँ
 $y = 2x$ और $y = 2$ द्वारा परिबद्ध त्रिभुज है
जबकि ऊपरी भाग समतल $z = 5 - x - y$ में है।

6

(ख) निम्नलिखित सीमाओं का मूल्यांकन कीजिए : 4

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} 5x \sin \frac{1}{5x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 7x^4 + 10x^3 + 3}{5x^7 + 1}$

5. (क) $\iiint_W y \, dx \, dy \, dz$ परिकलित कीजिए, जहाँ $W,$

$x = 0, y = 0, z = 7$ और पृष्ठ $z = x^2 + y^2$
द्वारा दिया गया प्रदेश है। 6

(ख) दिखाइए कि $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3 + 3xy^2$
द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ का बिन्दु
 $(0, 0)$ पर एक स्तब्ध बिन्दु है लेकिन $(0, 0)$
पर इनका कोई भी स्थानीय चरम मान नहीं है। 4

6. (क) मान लीजिए $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x, y) = x^2 + y$ द्वारा परिभाषित एक फलन है। जाँच कीजिए कि f के प्रांत के प्रत्येक बिन्दु (a, b) पर $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ है। 2

- (ख) निम्नलिखित फलन-युग्मों के लिए फलनिक सम्बन्ध ज्ञात कीजिए :

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x}, \quad g(x, y) = \frac{x - y^2}{2x + 3y^2}$$

इससे निष्कर्ष निकालिए कि f और g फलनिकतः आश्रित हैं। 3

- (ग) समाकलन क्रम को उल्टा करके निम्नलिखित पुनरावृत समाकल का मूल्यांकन कीजिए : 5

$$\int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} xy \, dy \right) dx$$

7. (क) रेखा $y = x$ के अनुदिश $(0, 0)$ से $(1, 1)$ तक में गतिमान कण को ले जाने में बल $F = (x^2y, xy^2)$ द्वारा किए गए कार्य को ज्ञात कीजिए। 4

- (ख) मान लीजिए :

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = |x - 1| + |y|$$

द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिए क्या f , बिन्दु $(0, 0)$ पर संतत है। बिन्दु $(0, 0)$ पर यदि आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है, तो उन्हें परिकलित कीजिए। 6