

No. of Printed Pages : 8

**MTE-06**

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**June, 2023**

**MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA**

*Time : 2 Hours*

*Maximum Marks : 50*

---

**Note :** (i) *Question No. 7 is compulsory.*

(ii) *Answer any **four** questions from the rest of the questions.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

(iv) *Do the rough work at the side of the page or at the bottom.*

---

---

1. (a) Suppose  $G$  is a non-abelian group and  $a, b \in G$ . Show by the principle of mathematical induction that  $(aba^{-1})^n = ab^n a^{-1} \quad \forall n \in \mathbf{N}$ . 3

(b) Suppose  $f(x) = 2x^2 + 1$ ,  $g(x) = x^4 + x^2 + x + 2$  in  $\mathbf{Z}_3[x]$ . Find the quotient and the remainder when  $g(x)$  is divided by  $f(x)$  in  $\mathbf{Z}_3[x]$ . 3

**P. T. O.**

- (c) Check if the following polynomial is irreducible : 2

$$x^6 + 6x^4 + 12x + 12 \text{ in } \mathbf{Z}[x].$$

- (d) Define the order of an element in a finite group. Find the order of  $\bar{3}$  in  $\mathbf{Z}_{11}$ . 2

2. (a) Define homomorphism between rings. Check whether the map  $f : \mathbf{Z} \rightarrow M_2(\mathbf{Z})$  defined by  $f(n) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  is a ring homomorphism. 2

- (b) Define a normal subgroup. Check whether  $\{1, (1\ 3)\}$  is a normal subgroup of  $h$ . 2

- (c) Give an example of a commutative ring with unity  $R$  and elements  $a, b \in R, b \neq 0$  such that  $ab = b$  and  $a \neq 1$ . 3

- (d) Express the permutation :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

first as a product of disjoint cycles and then as a product of transpositions. What is the signature of  $\alpha$  ? 3

3. (a) Define a binary operation  $*$  on  $\mathbf{Z}$  by  $a * b = a + b + 2ab$ . Check if  $*$  is associative. Find the identify element under  $*$ . Which element are invertible

under  $*$  ? Find the inverse of each invertible element under  $*$ . 5

- (b) Let  $\mathbf{C}^2$  be the ring under componentwise addition and multiplication. Find an ideal  $I$  of  $\mathbf{C}^2$  that is isomorphic to  $\mathbf{C}$  as a ring. Check whether  $\frac{\mathbf{C}^2}{I} \simeq \mathbf{C}$  as rings. Justify your answer. 5

4. (a) Let  $\mathbf{R} = \mathbf{Z} + \sqrt{2}\mathbf{Z}$  and  $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$ . Show that  $\theta : \mathbf{R} \rightarrow S$  defined by  $\theta(a + \sqrt{2}b) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$  is an isomorphism of rings. 5

- (b) Explain, how  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  is a subgroup of  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ . Show that  $\mathbf{Z} + a \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  has finite order if and only if  $a \in \mathbf{Q}$ . 5

5. (a) Let  $G$  be a group of order 54. How many Sylow 3-subgroups, Sylow 2-subgroups and sylow 5-subgroups can  $G$  have ? Give reasons for your answers. 6

- (b) Define a relation  $R$  on the set of integers  $\mathbf{Z}$  by  $a R b$  if 3 divides  $a - b$ . Show that  $R$  is an equivalence relation. Also find all distinct equivalence classes. 4

6. (a) Show that the ring  $\mathbf{Q}[x]$  has got infinitely many maximal ideals. 3
- (b) Prove that  $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$  is not a UFD by giving two different factorisations of 4 as product of irreducible elements in  $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ . 4
- (c) Prove that any group of prime order is cyclic. 3
7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answers with a short proof or a counter-example :  $5 \times 2 = 10$
- (a) If  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  is a function and  $A \subset \mathbf{Z}$ , then  $f^{-1}(f(A)) \subset A$ .
- (b) There is a non-trivial group homomorphism from  $\mathbf{Z}_8$  to  $\mathbf{Z}$ .
- (c) The group  $S_7$  has an element of order 11.
- (d) There is a field that has got exactly 6 elements.
- (e) Union of two subrings of a ring is a subring of the ring.

**MTE-06**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम ( बी. डी. पी. )

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) प्रश्न सं. 7 करना अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न सं 1 से 6 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैल्कुलेटर के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

(iv) रफ कार्य पृष्ठ के किनारे या नीचे कीजिए।

1. (क) मान लीजिए कि  $G$  एक अन्-आबेली समूह है और  $a, b \in G$ । आगमन विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि :

$$(aba^{-1})^n = ab^n a^{-1} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

- (ख) मान लीजिए कि  $f(x) = 2x^2 + 1$ ,  $g(x) = x^4 + x^2 + x + 2$ ,  $\mathbf{Z}_3[x]$  में हैं।  $\mathbf{Z}_3[x]$  में  $g(x)$  को  $f(x)$  से विभाजन करने पर प्राप्त भागफल और शेषफल निकालिए।

(ग) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित बहुपद अखण्डनीय है : 2

$$x^6 + 6x^4 + 12x + 12 \in \mathbf{Z}[x]$$

(घ) एक परिमित समूह में एक अवयव की कोटि परिभाषित कीजिए।  $\mathbf{Z}_{11}$  में  $\bar{3}$  का कोटि निकालिए। 2

2. (क) वलयों के बीच की समाकारिता परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि  $f(n) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f : \mathbf{Z} \rightarrow M_2(\mathbf{Z})$  एक वलय समाकारिता है। 2

(ख) प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि  $\{1, (1\ 3)\}$ ,  $h$  की प्रसामान्य उपसमूह है या नहीं। 2

(ग) उदाहरण के तौर पर एक क्रमविनिमेय वलय  $\mathbf{R}$  और दो अवयव  $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$ , दीजिए जिसके लिए  $ab = b$  हो और  $a \neq 1$  हो। 3

(घ) क्रमचय  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$  को पहले असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में और उसके बाद पक्षान्तरणों के गुणनफलन के रूप में व्यक्त कीजिए।  $\alpha$  का चिह्नक क्या है ? 3

3. (क)  $\mathbf{Z}$  पर  $a * b = a + b + 2ab$  द्वारा एक द्वि-आधारी संक्रिया परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि  $*$  साहचर्य है।  $*$  के सापेक्ष तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।  $*$  के सापेक्ष कौन-से अवयवों का प्रतिलोम है ?  $*$  के सापेक्ष जो भी अवयव का प्रतिलोम है उसका प्रतिलोम निकालिए। 5

(ख)  $\mathbf{C}^2$  लीजिए जो संगत घटकों के योग और गुणन के सापेक्ष वलय है।  $\mathbf{C}^2$  की एक ऐसी गुणजावली  $I$  निकालिए जो वलय क तौर पर  $\mathbf{C}$  से तुल्याकारी है। जाँच कीजिए वलय क तार पर  $\frac{\mathbf{C}^2}{I} \cong \mathbf{C}$ । अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

4. (क) मान लीजिए  $\mathbf{R} = \mathbf{Z} + \sqrt{2}\mathbf{Z}$  और  $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$ । दिखाइए कि  $\theta : \mathbf{R} \rightarrow S$  जो  $\theta(a + \sqrt{2}b) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$  द्वारा परिभाषित है, एक वलय तुल्याकारिता है। 5

(ख) बताइए कि  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  क्यों  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  का एक उपसमूह है। दिखाइए कि  $\mathbf{Z} + a \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  की परिमित कोटि तभी और केवल तभी होती है जब  $a \in \mathbf{Q}$  हो। 5

5. (क) मान लीजिए  $G$  कोटि 54 वाला एक समूह है।  $G$  के कितने सीलो 3-उपसमूह, सीलो 2-उपसमूह और सीलो 5-उपसमूह होते हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 6

- (ख) पूर्णाकों के समुच्चय  $\mathbf{Z}$  पर एक सम्बन्ध  $R$  इस प्रकार परिभाषित कीजिए कि  $aRb$  यदि  $3, a-b$  को विभाजित करता हो। दिखाइए कि  $R$  एक तुल्याकारी सम्बन्ध है। भिन्न-भिन्न तुल्याकारी वर्ग भी ज्ञात कीजिए। 4
6. (क) दिखाइए कि वलय  $\mathbf{Q}[x]$  की अनंततः अनेक गुणजावलियाँ हैं। 3
- (ख)  $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$  में अखंडनीय अवयवों के गुणनफल के रूप में 4 के दो अलग-अलग गुणनखंडन देते हुए सिद्ध कीजिए कि  $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$  यू. ए. फ. डी. नहीं है। 4
- (ग) सिद्ध कीजिए कि अभाज्य कोटि वाला प्रत्येक समूह चक्रीय होता है। 3
7. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर की पुष्टि, क्रमशः, एक लघु उपपत्ति या प्रतिउदाहरण द्वारा कीजिए :  $5 \times 2 = 10$
- (क) यदि  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  एक फलन है और  $A \subset \mathbf{Z}$  है तो  $f^{-1}(f(A)) \subset A$  है।
- (ख)  $\mathbf{Z}_8$  से  $\mathbf{Z}$  तक एक अतुच्छ समूह समाकारिता होती है।
- (ग) समूह  $S_7$  में कोटि 11 वाला एक अवयव है।
- (घ) ठीक-ठीक 6 अवयव वाला एक क्षेत्र होता है।
- (ङ) एक वलय की दो उप-वलयों का सम्मिलन भी उस वलय की एक उप-वलय है।