

No. of Printed Pages : 7

MTE-01

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2023

(Elective Course : Mathematics)

MTE-01 : CALCULUS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Weightage : 70%

Note : (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Attempt any **four** questions from
Question Nos. 2 to 7.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

1. Which of the following statements are true or false. Give a short proof or a counter-example of your answers : 2 each

(i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$ is $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\int_{-1}^2 |x| dx = \frac{5}{2}$.

P. T. O.

(iii) The asymptotes of the curve $x^2y^2 = x^2 - y^2$ are $y = \pm 1$.

(iv) $\lim_{x \rightarrow 3^-} x - [x] = 0$.

(v) If f be the greatest integer function and g be the modulus function, then :

$$(g \circ f)\left(-\frac{5}{3}\right) - (f \circ g)\left(-\frac{5}{3}\right) = 0.$$

2. (a) Prove that the triangle of maximum area that can be inscribed on a given circle is an equilateral triangle. 5

(b) Integrate : 5

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin^2 x + \sin x + 3}} dx.$$

3. (a) Integrate : 5

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} e^x dx.$$

(b) If $y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$, show that : 5

$$x^2 y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 + 1)y_n = 0.$$

4. (a) For what values of k , is the function f , defined as $f(x) = \begin{cases} 3 - kx, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{4} - 3, & x \geq 2 \end{cases}$,

continuous at $x = 2$? Further, at which other points in $[1, \infty[$ is f continuous, and why ? 4

- (b) The semicircular region bounded by $y - 2 = \sqrt{9 - x^2}$ and the line $y = 2$ is rotated about the x -axis. Find the volume of the solid generated. 6
5. (a) Find the area of the surface of revolution obtained by revolving the parabola $y^2 = 4x$ from $x = 0$ to $x = 3$ about the x -axis. 5
- (b) Prove that for every $x > 0$: 5

$$\frac{x}{1 + x^2} < \tan^{-1} x < x.$$

6. Trace the curve : 10

$$(x^2 - 4)(y^2 - 1) = 4$$

clearly stating all the properties of curve tracing. 10

7. (a) Differentiate $\tan^{-1}\left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right)$ with respect to x . 5
- (b) Derive the reduction formula for $\int e^{ax} \sin^n x dx$. Using this evaluate $\int e^{2x} \sin^2 x dx$. 5

MTE-01

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

भारिता : 70%

नोट : (i) प्र. सं. 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न संख्या 2 से 7 तक कोई चार प्रश्न कीजिए।

(iii) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : प्रत्येक 2

(i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$ is $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\int_{-1}^2 |x| dx = \frac{5}{2}$.

(iii) वक्र $x^2y^2 = x^2 - y^2$ की अनंतस्पर्शियाँ $y = \pm 1$ हैं।

(iv) $\lim_{x \rightarrow 3^-} x - [x] = 0$

(v) यदि f एक अधिकतम पूर्णांक फलन और g एक मापांक फलन है, तो :

$$(g \circ f)\left(-\frac{5}{3}\right) - (f \circ g)\left(-\frac{5}{3}\right) = 0.$$

2. (क) सिद्ध कीजिए कि एक दिये गये वृत्त में अन्तर्निहित त्रिभुज जिसका क्षेत्रफल अधिकतम है, वह समद्विबाहु त्रिभुज होगा। 5

(ख) समाकलन कीजिए : 5

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin^2 x + \sin x + 3}} dx$$

3. (क) समाकलन कीजिए : 5

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} e^x dx$$

(ख) यदि : 5

$$y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$$

तो दर्शाइए कि :

$$x^2 y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 + 1)y_n = 0$$

4. (क) k के किन मानों के लिए निम्नलिखित द्वारा परिभाषित फलन $f, x=2$ पर संतत है ?

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{4} - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

इसके आगे, $[1, \infty[$ में किन बिन्दुओं पर f संतत है और क्यों ? 4

- (ख) अर्द्धवृत्त $y-2 = \sqrt{9-x^2}$ और रेखा $y=2$ से घिरे क्षेत्रफल को x -अक्ष के परितः घुमाया जाता है। इस प्रकार जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। 6

5. (क) परवलय $y^2 = 4x$ को $x=0$ से $x=3$ तक x -अक्ष के परितः घुमाने के बने ठोस पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

- (ख) प्रत्येक $x=0$ के लिए सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$$

6. वक्र $(x^2 - 4)(y^2 - 1) = 4$ का आरेखण कीजिए। ऐसा करने के लिए जिन गुण-धर्मों का प्रयोग किया जाता है, उन्हें लिखिए। 10
7. (क) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right)$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए। 5
- (ख) $\int e^{ax} \sin^n x dx$ के लिए समानयन सूत्र निकालिए तथा इस सूत्र का प्रयोग करके $\int e^{2x} \sin^2 x dx$ का मूल्यांकन कीजिए। 5