No. of Printed Pages : 15 **BMTC-134**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2023

BMTC-134 : ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) There are eight questions in this paper.*

(ii) Question No. 8 is compulsory.

(iii) Do any ***six*** *questions from Question Nos.* ***1*** *to* ***7****.*

(iv) Use of calculator is not allowed.

---

1. (a) Define an abelian group. Give an example of a non-abelian group. (You don't need to prove that your example is a group. You have to only prove that it is non-abelian). 3

(b) Define a subgroup of a group. Check whether :

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

is a sub-group of the group of 2×3 matrices over $\mathbb{C}$ under addition. 2

(c) Define a semigroup. Give an example of an infinite semigroup. 2

(d) State Lagrange's theorem. What are the possible orders of subgroups of a group of order 12 ? 2

(e) Let S = {1, 2, 3, 4} and * be the binary operation defined by $a * b = a$. Compute the Cayley table for (S, *). Is * commutative ? Is * associative ? Justify your answers. 6

2. (a) Let A be a 3×4 real matrix, B be a 4×2 real matrix and C be a 2×3 real matrix. Which of the following operations are defined ?

(i) $CA + B^t$

(ii) $AB + C^t$

For those operations that are defined, what is the order of the resulting matrix? 3

(b) Let $\alpha = (1\ 2\ 5)$, $\beta = (1\ 4\ 3\ 2) \in S_5$. Compute $\sigma = \alpha.\beta^{-1}$. Write σ as a product of transpositions. What is the signature of σ ? 3

(c) If F is a field, show that $U(F[x]) = F^*$. 4

(d) Let $R = \mathbb{Z}_{20}$: 5

(i) Give, with justification, a nilpotent element in R.

(ii) Give, with justification, a zero divisor in R which is not nilpotent.

(iii) What is the order of U(R) ?

3. (a) Let R be a ring in which $a^2 = a$ for all $a \in \mathrm{R}$. Show that $a = -a$ and R is commutative. 5

(b) Define an integral domain. Give an example of an integral domain which is not a field. 2

(c) Calculate the following : 3

(i) $\left(\bar{2}x^3+\bar{3}x^2+\bar{4}x+\bar{1}\right)+\left(\bar{3}x^3+\bar{4}x^2+\bar{2}x+\bar{3}\right)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$.

(ii) $\left(\bar{3}x^2+\bar{2}x+\bar{6}\right)\cdot\left(\bar{3}x^3+\bar{4}x+\bar{5}\right)$ in $\mathbb{Z}_7[x]$.

(d) Show that, if G is a finite group and $a \in \mathrm{G}, \mathrm{o}(a) | \mathrm{o}(\mathrm{G})$. Further, show that $a^{\mathrm{o}(\mathrm{G})} = e$ for all $a \in \mathrm{G}$. Deduce the Euler-Fermat theorem $a^{\phi(n)} \equiv 1 (\bmod n)$ for all $a, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, (a, n) = 1$. 5

4. (a) Let $\mathrm{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Check whether R is a subring of $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Is R an ideal of $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$? Justify your answer. 4

(b) Find the gcd of the polynomials $x^4 + 3x + 2$ and $x^3 + 3x^2 + 5x + 3$. 5

(c) If H and K are normal abelian subgroups of a group and if $H \cap K = \{e\}$, show that HK is abelian. Will the result be still true if we remove the condition that H and K are normal ? Justify your answer. 6

5. (a) Let R be the ring $(\wp(X), \Delta, \cap)$, $S = (\wp(Y), \Delta, \cap)$, where X is a non-empty set with a proper non-empty subset Y. Let $\phi : R \to S$ be defined by $\phi(A) = A \cap Y$ for all $A \subset X$. Prove that ϕ is a ring homomorphism. Is ϕ surjective ? Justify your answer. 6

(b) Let F be a field and let $f(x) \in F[x]$ be irreducible in $F[x]$. Show that the ideal $\langle f(x) \rangle$ is a maximal ideal in $F[x]$. Use this to deduce that $\mathbb{Q}[x] / \langle x^5 + 6x^3 + 12 \rangle$ is a field. 7

(c) Define a normal subgroup. Give an example of normal subgroup of $GL_2(\mathbb{R})$. 2

6. (a) Find the order of each of the elements in U(15). Is U(15) cyclic ? Justify your answer. 5

(b) Show that : 7

$$G/Z\,(G) \simeq \text{Inn } G.$$

(c) Check whether or not $\langle \bar{3} \rangle$ is a maximal ideal in $\mathbb{Z}_9$. 3

7. (a) Let $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$ and $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\}$ for $n \in \mathbb{N}$. Check that $U_n \subseteq S^1$. Further, show that $U_n \leq S^1$. 3

(b) Let R be ring (not necessarily commutative) and let I and J be ideal of R. Show that $I \cap J$ and $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ are ideals of R. 5

(c) Show that $\langle x, 5 \rangle$ is not a principal ideal in $\mathbb{Z}[x]$. 7

8. Which of the statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or a counter-example : 10

(a) Every subgroup of S_3 is normal.

(b) Every abelian group is cyclic.

(c) In a ring with identity, the sum of any two units is a unit.

(d) If a field has characteristic *p*, *p* a prime, the field is finite.

(e) If every element in group has finite order, the group is finite.

BMTC-134

कला स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

बी.एम.टी.सी.-134 : बीजगणित

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i) इस प्रश्न पत्र में आठ सवाल हैं।*

*(ii) सवाल संख्या **8** करना अनिवार्य है।*

*(iii) प्रश्न संख्या **1** से **7** में से कोई भी **6** सवाल कीजिए।*

(iv) कैलकुलेटर प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) एक अनबेली समूह को परिभाषित कीजिए। एक अनबेली समूह का उदाहरण दीजिए। (आपको आपका उदाहरण समह् स्थापित करने की जरूरत नहीं है, अनबेली स्थापित करना पर्याप्त है।) 3

(ख) एक समूह का उपसमूह परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि :

$$\mathrm{H} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

योग के सापेक्ष $\mathbb{C}$ पर 2×3 आव्यूहों का समूह का उपसमूह है। 2

(ग) एक अर्ध–समूह को परिभाषित कीजिए। एक अनन्त अर्ध–समूह का उदाहरण दीजिए। 2

(घ) लैग्रांज प्रमेय बताइए। एक कोटि 12 वाली समूह की उपसमूहों की कोटियाँ क्या हो सकती हं ? 2

(ङ) मान लीजिए $S = \{1, 2, 3, 4\}$ और * द्वि–आधारी संक्रिया $a * b = a$ द्वारा परिभाषित है। (S, *) को कैली सारणी बनाइए। क्या * क्रमविनिमेय है ? क्या * साहचर्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 6

2. (क) मान लीजिए A एक 3×4 वास्तविक आव्यूह है, B एक 4×2 वास्तविक आव्यूह है और C एक 2×3 वास्तविक आव्यूह है। निम्नलिखित में से कौन–सी संक्रियाएँ साध्य हैं ?

(i) $CA + B^t$

(ii) $AB + C^t$

जो संक्रियाएँ परिभाषित हैं उनमें प्राप्त आव्यूह की कोटि क्या होगी ? 3

(ख) मान लीजिए $\alpha = (1\ 2\ 5), \beta = (1\ 4\ 3\ 2) \in S_5$. $\sigma = \alpha.\beta^{-1}$ परिकलित कीजिए। σ को पक्षान्तरण के गुणनफल के रूप लिखिए। σ की चिन्हक क्या है ? 3

(ग) यदि F एक क्षेत्र है, तो दिखाइए कि $U(F[x]) = F^*$. 4

(घ) मान लीजिए $R = \mathbb{Z}_{20}$: 5

(i) पुष्टि क साथ R में एक शून्य भावो अवयव दीजिए। 5

(ii) पुष्टि क साथ R में एक शून्य का भागक दीजिए जो शून्य भावी न हो।

(iii) U(R) की कोटि क्या है ?

3. (क) मान लीजिए R एक वलय है जिसमें प्रत्येक $a \in R$ के लिए $a^2 = a$। दिखाइए कि $a = -a$ और R क्रमविनिमेय है। 5

(ख) एक पूर्णांकीय प्रान्त को परिभाषित कीजिए। एक पूर्णांकीय प्रान्त का उदाहरण दीजिए जो क्षेत्र न हो। 2

(ग) निम्नलिखित को परिकलित कीजिए : 3

(i) $\mathbb{Z}_5[x]$ में

$$\left(\bar{2}x^3+\bar{3}x^2+\bar{4}x+\bar{1}\right)+\left(\bar{3}x^3+\bar{4}x^2+\bar{2}x+\bar{3}\right)$$

(ii) $\mathbb{Z}_7[x]$ में $\left(\bar{3}x^2+\bar{2}x+\bar{6}\right)\cdot\left(\bar{3}x^3+\bar{4}x+\bar{5}\right)$

(घ) दिखाइए कि, यदि G एक परिमित समूह है और $a \in G, o(a) | o(G)$। आगे दिखाइए प्रत्येक $a \in G$ के लिए $a^{o(G)} = e$। ऑयलर-फर्मा प्रमेय, प्रत्येक $a, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, (a, n) = 1$ के लिए $a^{\phi(n)} \equiv 1 (\bmod n)$ भी दर्शाइए। 5

4. (क) मान लीजिए $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. जाँच कीजिए कि R $M_2(\mathbb{R})$ का उपवलय है। क्या R $M_2(\mathbb{R})$ को गुणजावली है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ख) बहुपद $x^4 + 3x + 2$ और $x^3 + 3x^2 + 5x + 3$ का gcd निकालिए। 5

(ग) यदि H और K एक समूह क प्रसामान्य आबेली उपसमूह हैं और $H \cap K = \{e\}$, तो दिखाइए कि HK आबेली है। यह निष्कर्ष प्रतिबन्ध, H और K प्रसामान्य होना चाहिए, क्या हटाने पर भी सत्य होगी ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 6

5. (क) मान लीजिए वलय $(\wp(X), \Delta, \cap)$, $S = (\wp(Y), \Delta, \cap)$, जहाँ X अतिरिक्त समुच्चय है और Y, X की अतिरिक्त उपसमुच्चय है। मान लीजिए $\phi : R \to S$ सभी $A \subset X$ के लिए $\phi(A) = A \cap Y$ द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि ϕ एक वलय समाकारिता है। क्या ϕ आच्छादक है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 6

(ख) मान लीजिए F एक क्षेत्र है और $f(x) \in F[x]$ $F(x)$ में अखंडनीय है। दिखाइए कि $\langle f(x) \rangle$ एक उच्चिष्ठ गुणजावली है। इसका प्रयोग करके दिखाइए कि $\mathbb{Q}[x]/\langle x^5 + 6x^3 + 12 \rangle$ एक क्षेत्र है। 7

(ग) एक प्रसामान्य उपसमूह परिभाषित कीजिए। $GL_2(\mathbb{R})$ का एक प्रसामान्य उपसमूह का उदाहरण दीजिए। 2

6. (क) $U(15)$ में प्रत्येक अवयव की कोटि निकालिए। क्या $U(15)$ चक्रीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

(ख) दिखाइए कि : 7

$$G/Z\,(G) \simeq \text{Inn } G\text{।}$$

(ग) जाँच कीजिए कि $\langle \bar{3} \rangle\, \mathbb{Z}_9$ की उच्चिष्ठ गुणजावली है या नहीं। 3

7. (क) माना कि $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$ और $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\}$ $n \in \mathbb{N}$, जाँच कीजिए कि $U_n \subseteq S^1$। आगे दिखाइए कि $U_n \leq S^1$। 3

(ख) मान लीजिए R एक वलय है। क्रमविनिमेय होना जरूरी नहीं है। मान लीजिए I और J, R की गुणजावलियाँ हैं। दिखाइए कि $I \cap J$ और $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ R को गुणजावलियाँ हैं। 5

(ग) दिखाइए कि $\langle x, 5 \rangle\, \mathbb{Z}[x]$ में मुख्य गुणजावली नहीं है। 7

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण द्वारा कीजिए : 10

(क) S_3 का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य है।

(ख) प्रत्येक आबेली समूह चक्रीय है।

(ग) एक तत्समकी वलय में दो मात्रक का योग मात्रक होता है।

(घ) यदि एक क्षेत्र का अभिलाक्षणिक p है, p अभाज्य है, तो क्षेत्र परिमित होता है।

(ङ) एक समूह में प्रत्येक अवयव का कोटि परिमित है तो समूह परिमित है।