

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BSCG)

Term-End Examination
June, 2023

BMTC-132 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note : (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Attempt any six questions from Q. No. 2 to 8.*

(iii) *Use of calculators is not allowed.*

1. State whether the following statements are True or False. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : $5 \times 2 = 10$

(i) The differential equation :

$$\cos y dx + (y^2 - x \sin y) dy = 0$$

is an exact differential equation.

P. T. O.

(ii) The first order partial differential equation formed by eliminating the arbitrary constants c and r from the family of sphere $x^2 + y^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$ is $xq - yp = 0$.

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ is finite.

(iv) If :

$$w = x + 2y + z^2$$

then $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial z \partial y}$.

(v) $\frac{dy}{dx} + y^3 = 0$ is a linear differential equation.

2. (a) Solve the differential equation : 8

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 1}$$

(b) Solve the simultaneous equations : 7

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y}$$

[3]

BMTG-132

3. (a) Solve the differential equation : 8

$$x^2 y'' + 2x y' - 20y = (x+1)^2$$

- (b) Find the integrating factor and solve the differential equation : 7

$$(e^{x+y} - y) dx + (xe^{x+y} + 1) dy = 0$$

4. (a) By using the method of variation of parameter, find the general solution of the differential equation : 8

$$y'' + y = \sec^2 x$$

- (b) If :

$$Z = x^2 y + 2xy^4$$

where $x = \sin zt$

and $y = \cos t$

find $\frac{dz}{dt}$ when $t = 0$ by (i) chain rule and by

(ii) the direct substitution. 7

P. T. O.

[4]

BMTG-132

5. (a) By using the method of undetermined coefficients, find the general solution of the differential equation : 8

$$y'' + y' - 2y = -2e^{-x} - 5 \cos x$$

- (b) Show that
- e^{3x}
- and
- xe^{3x}
- are the solutions of the differential equation
- $y'' - 6y' + 9y = 0$
- .

Also find a solution that satisfies the condition $y(0) = -1.4, y'(0) = 4.6$. 7

6. (a) Verify that the differential equation : 10

$$z(x^2 - y^2 - z^2) dx + (x + z) xz dy + x(z^2 - x^2 - xy) dz = 0$$

is integrable and find its integral.

- (b) Solve : 5

$$y' = \frac{zy^4 + x^4}{xy^3}$$

7. (a) Find the general solution of the equation : 8

$$x(y^2 - z^2)u_x + y(z^2 - x^2)u_y + z(x^2 - y^2)u_z = 0$$

(b) Show that for the function f given by : 7

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

But $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ does not exist.

8. (a) Show that the following function f is differentiable at $(0, 0)$: 8

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(b) Find the complete solution of the equation $px + qy = pq$. 7

BMTTC-132

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. एस. सी. जी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

बी.एम्.टी.सी.-132 : अवकल समीकरण

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

नोट : (i) प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न संख्या 2 से 8 में से कोई छः प्रश्न हल कीजिए।

(iii) कैलकुलेटरो का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य।

अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : $5 \times 2 = 10$

(i) अवकल समीकरण :

$$\cos y \, dx + (y^2 - x \sin y) \, dy = 0$$

एक यथातथ अवकल समीकरण है।

- (ii) गोले $x^2 + y^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$ के परिवार से यादृच्छिक चरों c और r को हटाने पर बनने वाला प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण है
- $$xq - yp = 0 \quad |$$

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}$ परिमित है।

(iv) यदि :

$$w = x + 2y + z^2$$

तब $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial z \partial y} \quad |$

(v) $\frac{dy}{dx} + y^3 = 0$ एक रैखिक अवकल समीकरण है।

2. (क) अवकल समीकरण :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y+1}{4x+2y-1}$$

का हल प्राप्त कीजिए।

8

(ख) युगपत समीकरणों :

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$$

का हल प्राप्त कीजिए।

7

3. (क) अवकल समीकरण :

8

$$x^2 y'' + 2x y' - 20y = (x+1)^2$$

का हल प्राप्त कीजिए।

(ख) अवकल समीकरण :

$$(e^{x+y} - y) dx + (xe^{x+y} + 1) dy = 0$$

का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए और इसे हल कीजिए।

7

4. (क) प्राचल विचरण विधि से अवकल समीकरण :

$$y'' + y = \sec^2 x$$

का व्यापक हल प्राप्त कीजिए।

8

(ख) यदि :

$$Z = x^2 y + 2xy^4$$

जहाँ $x = \sin zt$

और $y = \cos t$, तो $\frac{dz}{dt}$

ज्ञात कीजिए :

7

(i) शृंखला नियम और (ii) प्रत्यक्ष प्रतिस्थापन से

जहाँ $t = 0$

5. (क) अनिर्धारित गुणांक विधि से अवकल

समीकरण :

$$y'' + y' - 2y = -2e^{-x} - 5 \cos x$$

का व्यापक हल प्राप्त कीजिए।

8

(ख) दिखाइए कि e^{3x} और xe^{3x} अवकल समीकरण

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

के हल हैं। प्रतिबन्ध $y(0) = -1.4, y'(0) = 4.6$

को सन्तुष्ट करने वाला हल भी प्राप्त

कीजिए।

7

6. (क) सत्यापित कीजिए कि अवकल समीकरण : 10

$$z(x^2 - y^2 - z^2)dx + (x + z)xz dy \\ + x(z^2 - x^2 - xy)dz = 0$$

समाकलनीय है और इसका समाकल भी ज्ञात

कीजिए।

(ख) हल कीजिए :

5

$$y' = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$$

7. (क) समीकरण :

$$x(y^2 - z^2)u_x + y(z^2 - x^2)u_y \\ + z(x^2 - y^2)u_z = 0$$

का व्यापक हल प्राप्त कीजिए।

8

(ख) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ द्वारा दिए गए फलन के लिए

दिखाइए कि :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

लेकिन

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

का अस्तित्व नहीं होता।

7

8. (क) दिखाइए कि निम्नलिखित फंक्शन f , $(0, 0)$ पर

अवकलनीय है : 8

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(ख) समीकरण $px + qy = pq$ का पूर्ण हल प्राप्त

कीजिए। 7