No. of Printed Pages : 10 **PHE-14**

BACHELOR OF SCIENCE (B. SC.)

Term-End Examination

June, 2022

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS—III

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : (*i*) *Attempt all questions.*

(*ii*) *The marks for each question are indicated against it.*

(*iii*) *Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt any ***five*** parts : 5×2=10

(a) State the rank of the following tensor and identify the free and dummy indices :

$$A'^{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} A^{kl}$$

(b) Show that the set of all non-singular square matrices of order n forms a group under matrix multiplication.

(c) Verify that the matrix :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

is orthogonal.

(d) Show that the function $f(z) = |z|^2$ is non-analytic except at the origin.

(e) Locate and name the singularity of the function $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ at $z = 0$.

(f) Determine the Laplace transform of $f(t) = t$.

(g) Use Rodrigue's formula of Hermite polynomials :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

to evaluate $H_3(x)$.

(h) Plot the Laguerre polynomials $L_0(x)$ and $L_1(x)$ versus x.

2. Attempt any ***two*** parts : 2×5=10

(a) Show that the eigenvalues of a Hermitian matrix are real.

(b) Find eigenvalues and eigenvectors of the matrix :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) Show that $\{1, \omega, \omega^2\}$ is a cyclic group of order 3 with respect to multiplication, where ω is the imaginary cube root of unity.

3. Attempt any ***two*** parts : 2×5=10

(a) State Cauchy's integral theorem. Evaluate the integral $\oint_C \frac{dz}{1+z^2}$, where C is a circle $|z| = 3$.

(b) Obtain the Taylor series representation of $\log(1+z)$ about $z = 0$.

(c) Using the method of residues, show that :

$$\int_0^\infty \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

4. Attempt any ***two*** parts : 2×5=10

(a) Obtain the Laplace transform of $\cos pt$.

(b) Calculate the inverse Laplace transform of :

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 - 6s}$$

(c) Obtain the Fourier cosine transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 \quad , & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

5. Attempt any ***one*** part : 10

(a) Using the generating function for the Legendre polynomials :

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

show that :

$$nP_{n-1}(x) + (n+1)P_{n+1}(x)$$

$$= (2n+1)\, xP_n(x)$$

Hence, obtain the value of of $P_2(x)$. 8+2

(b) The expression for Bessel function of the first kind and of order m is given by :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

Using this expression, show that :

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; x^{\frac{-1}{2}} \sin x$$

and $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\; x^{-1/2} \cos x$. 5+5

PHE-14

विज्ञान स्नातक (बी. एस.-सी.)

सत्रांत परीक्षा

जन. 2022

पी. एच. ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ—III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : (*i*) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(*ii*) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

(*iii*) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

---

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : $5 \times 2 = 10$

(क) निम्नलिखित टेन्सर की कोटि बताइए तथा मक्त सचकांक और मक सचकांक की पहचान कीजिए :

$$A'^{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} A^{kl}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि आव्यह गणन के अधीन कोटि n वाले सभी व्यत्क्रमणीय वर्ग आव्यहों के समच्चय से एक समह बनता है।

(ग) सत्यापित कीजिए कि आव्यह :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

लांबिक है।

(घ) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = |z|^2$ मल-बिन्द के अतिरिक्त अन्य सभी बिन्दओं पर अविश्लेषिक है।

(ङ) $z = 0$ पर फलन $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ की विचित्रता का निर्धारण कीजिए और उनका नाम बताइए।

(च) फलन $f(t) = t$ का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए।

(छ) हर्मिट बहपदों के रोड्रिगेज सत्र :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

का उपयोग कर $H_3(x)$ को परिकलित कीजिए।

P. T. O.

(ज) लागेर बहपदों $L_0(x)$ और $L_1(x)$ का x के साथ आलेख खींचिए।

2. कोई **दो** भाग कीजिए : $2 \times 5 = 10$

(क) सिद्ध कीजिए कि हर्मिटी आव्यह के आइगेन मान वास्तविक होते हैं।

(ख) निम्नलिखित आव्यह P के आइगेन मान और आइगेन सदिश प्राप्त कीजिए :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(ग) यदि $\omega, 1$ का अधिकल्पित घन मल हो, तो दिखाइए कि समच्चय $\{1, \omega, \omega^2\}$ गणन के अधीन कोटि 3 वाला एक चक्रीय समह है।

3. कोई **दो** भाग कीजिए : $2 \times 5 = 10$

(क) कौशी समाकल प्रमेय का कथन लिखिए। समाकल $\oint_C \frac{dz}{1+z^2}$ का मान परिकलित कीजिए, जहाँ $C, |z| = 3$ का एक वत्त है।

(ख) $z = 0$ के प्रति $\log(1+z)$ की टेलर श्रेणी का निरूपण प्राप्त कीजिए।

(ग) अवशिष्ट विधि का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^\infty \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

4. कोई **दो** भाग कीजिए : 2×5=10

(क) $\cos pt$ का लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए।

(ख) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^3+s^2-6s}$ का व्यत्क्रम लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए।

(ग) फलन :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \quad , & |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

का फरिये कोसाइन रूपांतर प्राप्त कीजिए।

5. कोई **एक** भाग कीजिए : 10

(क) लेजान्ड्रे बहपदों के जनक फलन :

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि

$$nP_{n-1}(x) + (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)\,xP_n(x)$$

अतएव $P_2(x)$ का मान प्राप्त कीजिए। 8+2

(ख) कोटि m वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलन :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि :

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; x^{\frac{-1}{2}} \sin x$$

और $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\; x^{-1/2} \cos x$ । 5+5