

No. of Printed Pages : 16 **MTE-04/MTE-05**

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

**Term-End Examination
June, 2022**

(Elective Course : Mathematics)

MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA

&

MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 50

Instructions :

1. *Students registered for both MTE-04 & MTE-05 courses should answer both the question papers in two separate answer books entering their enrolment number, course code and course title clearly on both the answer books.*
2. *Students who have registered for MTE-04 or MTE-05 should answer the relevant question paper after entering their enrolment number, course code and course title on the answer book.*

MTE-04/MTE-05

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2022

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

एवं

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

निर्देश :

1. जो छात्र एम.टी.ई.-04 और एम.टी.ई.-05 दोनों पाठ्यक्रमों के लिए पंजीकृत हैं, दोनों प्रश्न-पत्रों के उत्तर अलग-अलग उत्तर पुस्तिकाओं में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।
2. जो छात्र एम.टी.ई.-04 या एम.टी.ई.-05 किसी एक के लिए पंजीकृत हैं, अपने उसी प्रश्न-पत्र के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।

[3]

MTE-04/MTE-05

MTE-04**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME****(BDP)****Term-End Examination****June, 2022****MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA***Time : 1½ Hours**Maximum Marks : 25*

Note : Question No. 5 is compulsory. Do any three questions from Question No. 1 to 4. Use of calculator is not allowed.

1. (a) If a, b, c are roots of $x^3 + qx + r = 0$, find the value of 3

$$(b + c)^{-1} + (c + a)^{-1} + (a + b)^{-1}.$$

- (b) Check whether or not :

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

for any four sets A, B, C, D . 2

P. T. O.

[4]

MTE-04/MTE-05

2. (a) Show, using De Moivre's theorem, that : 2

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

- (b) State Weierstrass' inequality and apply it to show that : 3

$$\frac{1}{n+1} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+i} \right) \geq 1$$

3. (a) Find the values of a such that the system of linear equations :

$$ax - y - 4z = 1$$

$$ay + 2z = 0$$

$$x + 2y + z = 1$$

has a unique solution. 3

- (b) Let $x_1 = 1$ and $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n}$ for all $n \geq 1$. Use principle of mathematical induction to show that $x_n < 4$. 2

4. (a) Write the converse and contrapositive of the following statement :

If $n \in \mathbf{N}$ is of the form $4k + 1$ for some $k \in \mathbf{N}$, then $n = x^2 + y^2$ for $x, y \in \mathbf{N}$. 2

- (b) Can the following system of equations be solved by Cramer's rule ? If yes, apply Cramer's rule to solve the system. Otherwise solve it by Gauss' elimination method : 3

$$-x + 3z = 2$$

$$2x + y - 4z = -1$$

$$x + 2y + z = 4.$$

5. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or a counter-example :

(i) If A is a 2×2 real matrix satisfying $A^2 = I$, then $|A| = 1$. 2

(ii) If the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$ are non-real, a, b, c must be non-real. 2

(iii) If $z \in \mathbb{C}$, then the number $(i)^{2n} z \bar{z}$ is purely real for all positive integers n . 2

(iv) For subsets A and B of a universal set X we must have $A/B = B/A$. 2

(v) The arithmetic mean of any *three* non-zero real numbers is greater than their harmonic mean. 2

P. T. O.

MTE-04

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2022

एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

नोट : प्रश्न सं. 5 करना जरूरी है। प्रश्न सं. 1 से 4 में से कोई तीन प्रश्न हल कीजिए। कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. (क) यदि a, b, c समीकरण $x^3 + qx + r = 0$ के मूल हैं, तो :

$$(b+c)^{-1} + (c+a)^{-1} + (a+b)^{-1}$$

का मान ज्ञात कीजिए। 3

- (ख) चार समुच्चयों A, B, C, D के लिए :

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

है या नहीं ? 2

2. (क) द मॉयवर प्रमेय का प्रयोग करते हुए दिखाइए कि :

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

- (ख) वाइरस्ट्रास असमिका का कथन दीजिए और इसे लागू करके दिखाइए कि :

$$\frac{1}{n+1} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+i} \right) \geq 1$$

3. (क) a का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए रैखिक समीकरण निकाय :

$$ax - y - 4z = 1$$

$$ay + 2z = 0$$

$$x + 2y + z = 1$$

का एक अद्वितीय हल है।

- (ख) मान लीजिए $x_1 = 1$ और सभी $n \geq 1$ के लिए $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n}$ । गणितीय आगमन नियम से सिद्ध कीजिए कि $x_n < 4$ ।

4. (क) निम्नलिखित कथन के प्रतिधनात्मक और विलोम लिखिए :

यदि $n \in \mathbb{N}$ किसी $k \in \mathbb{N}$ के लिए $4k + 1$ के रूप में है, तो किसी $x, y \in \mathbb{N}$ के लिए $n = x^2 + y^2$ होगा।

- (ख) क्या निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को क्रमेण नियम से हल किया जा सकता है ? यदि हाँ, तो इसे क्रमेण नियम से हल कीजिए। यदि नहीं, तो गॉउसीय निराकरण विधि से हल कीजिए :

$$-x + 3z = 2$$

$$2x + y - 4z = -1$$

$$x + 2y + z = 4.$$

5. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए :

- (i) यदि A एक 2×2 वास्तविक आव्यूह है और $A^2 = I$, तब $|A| = 1$ होगा।

- (ii) यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के सभी मूल अवास्तविक हैं, तब a, b, c अवास्तविक हैं।

- (iii) यदि $z \in \mathbb{C}$, तब सभी पूर्णाकों $n \in \mathbb{N}$ के लिए $(i)^{2n} z \bar{z}$ विशुद्ध रूप से वास्तविक है।

- (iv) किसी भी समष्टीय समुच्चय X के उपसमुच्चयों A और B के लिए $A/B = B/A$ ।

- (v) किन्हीं तीन शून्येतर वास्तविक संख्याओं का समांतर माध्य उनके हरात्मक माध्य से बड़ा होता है।

MTE-05**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME****(BDP)****Term-End Examination****June, 2022****MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY***Time : 1½ Hours**Maximum Marks : 25*

Note : Question No. 1 is compulsory. Answer any three questions from Question No. 2 to 5.

Use of calculator is not allowed.

1. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answers : 10
- (i) Under a rotation of axes, a non-degenerate conic can become a degenerate conic.
- (ii) $x = y + z$ represents a line in the yz -plane.

P. T. O.

- (iii) In three-dimensional space, two non-parallel lines must always intersect.
- (iv) Any tangent plane to a cone intersects the cone in only one point.
- (v) $r = -\pi$ represents a line in the polar coordinates (r, θ) .
2. (a) Identify the conic represented by the equation :
- $$11x^2 + 2\sqrt{3}xy + 9y^2 - 12\sqrt{3}x - 12y - 12 = 0$$
- after reducing it to standard form. 3
- (b) What are the radius and the centre of the sphere :
- $$2(x^2 + y^2 + z^2) - y + 6z - 8 = 0 ?$$
- How many planes pass through its centre and any two distinct points on it ? Justify your answer. 2
3. (a) Show that every line tangent to the cone : 3
- $$x^2 + y^2 - z^2 - 2yz - 2xz - 2xy = 0$$

at the vertex is perpendicular to the generators of the cone :

$$x^2 + y^2 - 2yz - 2zx = 0.$$

- (b) Check whether or not for each $\alpha \in \mathbb{R}$, the line :

$L(\alpha) \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha + a \sin \alpha \tan \alpha = 0$ touches $y^2 = 4ax$. If it does, find the point of contact.

If $L(\alpha)$ does not touch $y^2 = 4ax$, give the equation of a conic that $L(\alpha)$ touches. 2

4. (a) Find the equation of the cylinder with base curve $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $2x + y + z = \frac{1}{2}$. 3

- (b) The equation :

$$3x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xy + 2x - 10z + 20 = 0$$

represents a central conicoid. True or False ? Justify your answer. 2

5. (a) Find the equation of the tangent plane(s) to the conicoid $3x^2 - y^2 + z^2 = 4$ which pass through the line $x + 2y - z = 0$, $z = 2$. 3

P. T. O.

- (b) Give an example, with justification, of each of the following : 2

- (i) A planar curve which is symmetric about $(0, 0)$, but not symmetric about either of the coordinate axes.
- (ii) A line in three-dimensional space whose projection on the z -axis is only one point.

MTE-05

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2022

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

नोट : प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 5 में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए :

10

- (i) अक्षों के घूर्णन के अधीन एक अनपभ्रष्ट शांकव अपभ्रष्ट शांकव बन जाता है।
- (ii) $x = y + z$, yz -तल में एक रेखा को निरूपित करता है।
- (iii) त्रिविमीय समष्टि में, दो असमांतर रेखाएँ हमेशा प्रतिच्छेद करती हैं।

P. T. O.

(iv) किसी शंकु का स्पर्श तल उस शंकु को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है।

(v) $r = -\pi$, ध्रुवीय निर्देशांकों (r, θ) में एक रेखा को निरूपित करता है।

2. (क) मानक रूप में समानीत करके पहचानिए कि समीकरण :

$$11x^2 + 2\sqrt{3}xy + 9y^2 - 12\sqrt{3}x - 12y - 12 = 0$$

किस शांकव को निरूपित करता है। 3

(ख) गोले $2(x^2 + y^2 + z^2) - y + 6z - 8 = 0$ की त्रिज्या और केन्द्र क्या हैं ? इसके केन्द्र और किन्हीं अन्य दो बिन्दुओं से कितने समतल गुजरते हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2

3. (क) दिखाइए कि शंकु :

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2yz - 2xz - 2xy = 0$$

के शीर्ष पर प्रत्येक स्पर्श रेखा शंकु

$$x^2 + y^2 - 2yz - 2zx = 0$$

के जनकों पर लम्बवत् है।

(ख) जाँच कीजिए कि प्रत्येक $\alpha \in \mathbb{R}$ के लिए रेखा

$$L(\alpha) \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha + a \sin \alpha \tan \alpha = 0$$

परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करती है या नहीं।

यदि स्पर्श करती है, तो स्पर्श बिन्दु ज्ञात कीजिए।

यदि $L(\alpha)$, $y^2 = 4ax$ को स्पर्श नहीं करती

है, तो एक शांकव का समीकरण दीजिए जो

$L(\alpha)$ को स्पर्श करता हो। 2

4. (क) आधार वक्र

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$2x + y + z = \frac{1}{2}$$

वाले बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए। 3

(ख) समीकरण

$$3x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xy + 2x - 10z + 20 = 0$$

एक केन्द्रीय शांकवज को निरूपित करता है।

सत्य या असत्य ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

2

5. (क) शांकवज $3x^2 - y^2 + z^2 = 4$ के उन स्पर्श तलों

के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा

$$x + 2y - z = 0, z = 2 \text{ से गुजरते हों। 3}$$

P. T. O.

(ख) निम्नलिखित में से प्रत्येक का पुष्टि सहित उदाहरण दीजिए : 2

(i) एक समतलीय वक्र जो $(0,0)$ के सापेक्ष सममित हो, लेकिन किसी भी निर्देशांक अक्ष के सममित न हो।

(ii) त्रिविमीय समष्टि में एक रेखा जिसका z -अक्ष पर प्रक्षेप केवल एक बिन्दु हो।