No. of Printed Pages : 8

MTE-06

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)
Term-End Examination
June, 2022

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Question no.* ***7*** *is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions from questions no.* ***1*** *to* ***6****. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

1. (a) Form an operation table of $G = \{\overline{5}, \overline{15}, \overline{25}, \overline{35}\}$ under multiplication (mod 40). Check whether or not G is a group. *4*

(b) The map $\phi : \mathbb{R}[x] \to M_3[\mathbb{R}]$ is defined by

$$\phi(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Show that ϕ is a ring homomorphism. Determine $\ker \phi$ also. *4*

(c) Check whether $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ is a PID or not. *2*

2. (a) Show that $< x >$ is not a maximal ideal in $\mathbb{Z}[x]$. *2*

(b) List all the subgroups of $\mathbb{Z}_{18}$, along with their generators. *3*

(c) Let $H = < (1 \;\; 2) >$ and $K = < (1 \;\; 2 \;\; 3) >$ be subgroups of S_3. Show that $S_3 = HK$. Is S_3 an internal direct product of H and K ? Justify your answer. *3*

(d) Check whether or not

$\{(2, 5), (1, 3), (5, 2), (3, 1)\}$ is an equivalence relation on $\{1, 2, 3, 5\}$. *2*

3. (a) Show that any group of order 35 is cyclic. *5*

(b) Use the Eisenstein's criterion for irreducibility of a polynomial over $\mathbb{Z}[x]$ to test whether $8x^3 + 6x^2 - 9x + 24$ is irreducible over $\mathbb{Z}[x]$ or not. Also, obtain the quotient field of $\mathbb{Q}[x]/< 8x^3 + 6x^2 - 9x + 24 >$. *3*

(c) Let R be a ring and let $a \in R$ be such that $a^2 = 1$. Let $S = \{ara \mid r \in R\}$. Show that S is a subring of R. *2*

4. (a) Show that $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ is not a UFD by giving, with justification, two different factorisations of 40 into irreducible elements. *5*

(b) Check whether S is a subring of R in each of the following cases : *5*

(i) $S = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid b \text{ is not divisible by } 3\}$, $R = \mathbb{Q}$.

(ii) S is the set of functions which are linear of the functions $\{\text{Id}, \cos nt, \sin nt \mid n \in \mathbb{Z}\}$ and $R = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

5. (a) Show that $f : (\mathbb{R}^+, \times) \to (\mathbb{R}, +)$, defined by $f(a) = \log_{10} a$, is an isomorphism of groups, where $\mathbb{R}^+$ is the set of positive real numbers. *4*

(b) Give an example of a ring R such that $a^2 = a$ for all $a \in R$. Show that any such ring is commutative. *3*

(c) Let $(\mathbf{C}^*, .)$ denote the group of non-zero complex numbers and let $S = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$. Show that $\mathbf{C}^*/S \simeq \mathbb{R}^+$, where $(\mathbb{R}^+, \times)$ is the group of positive real numbers. *3*

6. (a) Show that a permutation is even if and only if its signature is 1. Find the signature of $(2 \;\; 3 \;\; 4) \in S_4$ using the definition of signature. *4*

(b) Show that in a finite commutative ring, every non-zero element is either a zero divisor or a unit. Also, find the number of zero divisors of $\mathbb{Z}_{20}$. *6*

7. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Justify your answer with a short proof or a counter-example. *5×2=10*

(a) The characteristic of the ring $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ under componentwise addition and multiplication is the g.c.d. of m and n.

(b) The $\left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \right\}$ has no identity with respect to the binary operation of multiplication of 2×2 matrices.

(c) Any subring of a ring is an ideal.

(d) If a and b are elements of a group G with $O(a) = 2$, $O(b) = 3$, then $O(ab) = 6$.

(e) There is no onto homomorphism from $\mathbb{Z}_{15}$ to $\mathbb{Z}$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2022

एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *प्रश्न सं.* ***7 अनिवार्य*** *है । प्रश्न सं.* ***1*** *से* ***6*** *में से किन्हीं* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है ।*

---

1. (क) $G = \{\overline{5}, \overline{15}, \overline{25}, \overline{35}\}$ की गुणन (mod 40) (यानि मोड्यूलो (40)) के अंतर्गत एक संक्रिया सारणी बनाइए । जाँच कीजिए कि G एक समूह है या नहीं । *4*

(ख) दर्शाइए कि

$$\phi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

द्वारा परिभाषित फलन $\phi : \mathbb{R}[x] \to M_3[\mathbb{R}]$ एक वलय समाकारिता है । $\ker \phi$ भी ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) जाँच कीजिए कि क्या $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ एक PID है या नहीं । *2*

2. (क) दर्शाइए कि $< x >$, $\mathbb{Z}[x]$ में एक उच्चिष्ठ गुणजावली नहीं है । *2*

(ख) $\mathbb{Z}_{18}$ के सभी उपसमूहों की, इनके जनकों के साथ, एक सूची बनाइए । *3*

(ग) मान लीजिए कि $H = <(1 \quad 2)>$ और $K = <(1 \quad 2 \quad 3)>$ S_3 के उपसमूह हैं । दर्शाइए कि $S_3 = HK$. क्या S_3, H और K का आंतरिक अनुलोम गुणनफल है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *3*

(घ) जाँच कीजिए कि $\{1, 2, 3, 5\}$ पर $\{(2, 5), (1, 3), (5, 2), (3, 1)\}$ एक तुल्यता संबंध है या नहीं । *2*

3. (क) दर्शाइए कि कोटि 35 वाला कोई भी समूह चक्रिय होता है । *5*

(ख) $\mathbb{Z}[x]$ पर किसी बहुपद की अखण्डनीयता के लिए आइसनस्टाइन के निकष का प्रयोग करते हुए, जाँच कीजिए कि क्या $\mathbb{Z}[x]$ पर $8x^3 + 6x^2 - 9x + 24$ अखंडनीय है नहीं । $\mathbb{Q}[x]/< 8x^3 + 6x^2 - 9x + 24 >$ का भागफल क्षेत्र भी ज्ञात कीजिए । *3*

(ग) मान लीजिए कि R एक वलय है तथा $a \in R$ इस प्रकार है कि $a^2 = 1$. मान लीजिए कि $S = \{ara \mid r \in R\}$. दर्शाइए कि S, R की एक उपवलय है । *2*

4. (क) पुष्टि के साथ, 40 के अखंडनीय अवयवों वाले दो अलग-अलग गुणनखंडन देते हुए, दर्शाइए कि $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ एक UFD नहीं है । *5*

(ख) जाँच कीजिए कि क्या निम्न में से प्रत्येक स्थिति में S, R का एक उपवलय है या नहीं : 5

(i) $S = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid b$ 3 से विभाजित नहीं है$\}$, $R = \mathbb{Q}$.

(ii) S ऐसे फलनों का समुच्चय है जो फलनों $\{Id, \cos nt, \sin nt \mid n \in \mathbb{Z}\}$ के रैखिक संयोजन हैं तथा $R = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

5. (क) दर्शाइए कि $f(a) = \log_{10} a$ द्वारा परिभाषित $f : (\mathbb{R}^+, \times) \to (\mathbb{R}, +)$ समूहों की एक तुल्याकारिता है, जहाँ $\mathbb{R}^+$ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है । 4

(ख) ऐसे वलय R का एक उदाहरण दीजिए कि जिसके लिए सभी $a \in R$ के लिए $a^2 = a$ हो । दर्शाइए कि ऐसा कोई भी वलय क्रमविनिमेय होगा । 3

(ग) मान लीजिए कि $(\mathbf{C}^*, .)$ शून्येतर सम्मिश्र संख्याओं का समूह व्यक्त करता है तथा मान लीजिए कि $S = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$. दर्शाइए कि $\mathbf{C}^*/S \simeq \mathbb{R}^+$ है, जहाँ $(\mathbb{R}^+, \times)$ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समूह है । 3

6. (क) दर्शाइए कि एक क्रमचय तभी और केवल तभी सम होता है जब उसका चिह्नक 1 हो । चिह्ननक की परिभाषा का प्रयोग करते हुए, $(2 \;\; 3 \;\; 4) \in S_4$ का चिह्ननक ज्ञात कीजिए । 4

(ख) दर्शाइए कि एक परिमित क्रमविनिमेय वलय में, प्रत्येक शून्येतर अवयव या तो एक शून्य भाजक होता है या एक इकाई होता है । $\mathbb{Z}_{20}$ के शून्य भाजकों की संख्या भी ज्ञात कीजिए । 6

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से *असत्य* ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा दीजिए । *5×2=10*

(क) संगत घटकों के योग और गुणन के अंतर्गत वलय $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ का अभिलक्षणिक m और n का g.c.d. (महत्तम सार्व भाजक) है ।

(ख) समुच्चय

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \right\}$$

का 2×2 आव्यूहों के गुणन की द्विआधारी संक्रिया के सापेक्ष कोई तत्समक अवयव नहीं है ।

(ग) किसी भी वलय का उपवलय एक गुणजावली होती है ।

(घ) यदि a और b परिमित समूह G के अवयव हैं, $O(a) = 2$, $O(b) = 3$, तो $O(ab) = 6$ है ।

(ङ) $\mathbb{Z}_{15}$ से $\mathbb{Z}$ तक कोई आच्छादक समाकारिता नहीं है ।