

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**June, 2022**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50*

*(Weightage : 70%)*

---

**Note :** *Question no. 1 is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is **not** allowed.*

---

---

1. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Justify your answers. 10
- (a) "Every even number is composite or every equilateral triangle is an isosceles triangle."
- (b) The number of possible outcomes obtained by casting a dice 8 times is  $C(8, 6)$ .

- (c) The characteristic equation of the recurrence relation,  $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$  is  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .
- (d) The number of partitions of  $n$  is  $2n$ .
- (e) There is no graph with 75 vertices in which exactly 6 vertices have even degree.

2. (a) Write the converse, contrapositive and negation of the proposition : 3

“If two numbers are not equal, their squares are not equal.”

- (b) Suppose that we want to find the smallest and the greatest numbers in a set of  $2m$  distinct integers, using the divide-and-conquer approach. Find a recurrence relation to count the number of comparisons required. 5

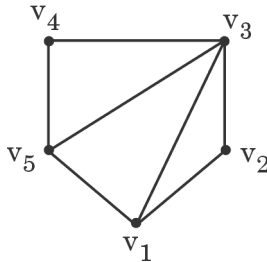
- (c) Calculate the Stirling number  $S_4^2$ . 2

3. (a) Find the number of positive integers, less than or equal to 1400, which are not divisible by any of 3, 5 or 7. 5

- (b) Solve the following recurrence relation : 5

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3^n, \quad n \geq 0$$

4. (a) Draw two non-isomorphic spanning trees of the graph below. Further, justify your answer. 4

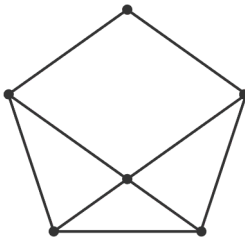


- (b) Check whether or not the following argument is valid : 3

$$\begin{array}{l}
 r \rightarrow p \\
 p \vee r \\
 p \rightarrow q \\
 \hline
 \therefore p \wedge q
 \end{array}$$

- (c) 20 mangoes are to be distributed among 4 persons so that each person gets at least one mango. In how many ways can this be done ? 3

5. (a) Give vertex and edge colourings of the graph below, using minimum number of colours. Justify your answer. 3



- (b) Reduce the following Boolean expression into DNF : 3

$$(x'_1 \wedge x_3) \vee (x'_2 \wedge x'_3)$$

- (c) An English word is called a *palindrome* if it reads the same from left to right or from right to left, e.g. ROTOR. Let  $a_n$  be the number of English words of length  $n$  (not necessarily meaningful) which are palindromes. We also consider a single letter a palindrome. 4

- (i) What are  $a_1$  and  $a_2$  ?  
(ii) Set up a recurrence for  $a_n$ .  
(iii) Check that

$$a_n = (\sqrt{26})^n \left\{ \frac{1 + \sqrt{26}}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1 - \sqrt{26}}{2} \right\}$$

is the solution of this recurrence.

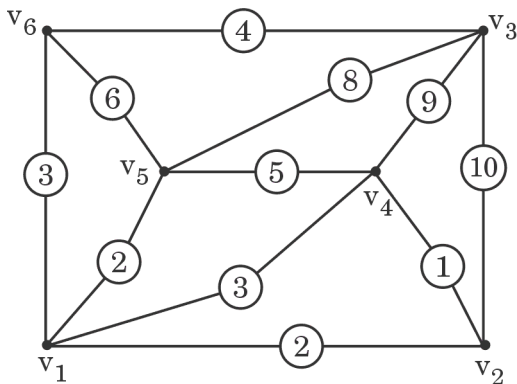
6. (a) Check whether the following graph is Hamiltonian or not. 2



(b) Prove that  $\sqrt{p}$  is irrational for any prime number  $p$ . 5

(c) If a 5-digit number is chosen at random, then what is the probability that the product of its digits is 18 ? 3

7. (a) Start with the cycle  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1\}$  in the following graph. Carry out the reduction step once to get a cycle of lesser weight. 3



- (b) Find the generating function of the recurrence

$$a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2} + 1,$$

with initial conditions  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 5$ . 5

- (c) Write down two propositions, with justification, such that  $q \rightarrow p$  is true but  $p \rightarrow q$  is false. 2
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)  
सत्रांत परीक्षा  
जून, 2022

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित  
एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50  
(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है । प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । 10

(क) “प्रत्येक सम संख्या भाज्य है या प्रत्येक समबाहु त्रिभुज एक समद्विबाहु त्रिभुज है ।”

(ख) एक पासे को 8 बार फेंकने पर प्राप्त संभावित परिणामों की संख्या  $C(8, 6)$  है ।

(ग) पुनरावृत्ति संबंध  $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$  का अभिलक्षणिक समीकरण  $x^2 - 5x + 6 = 0$  है ।

(घ)  $n$  के विभाजनों की संख्या  $2n$  है ।

(ङ) 75 शीर्षों पर ऐसा कोई भी ग्राफ़ नहीं है, जिसमें ठीक 6 शीर्ष सम कोटि के हों ।

2. (क) कथन “यदि दो संख्याएँ बराबर नहीं हैं, तो उनके वर्ग भी बराबर नहीं हैं ।” के विलोम, प्रतिस्थितक और निषेध लिखिए ।

3

(ख) मान लीजिए हम फूट डालो और जीतो विधि से  $2m$  अलग-अलग पूर्ण संख्याओं वाले एक समुच्चय में न्यूनतम और अधिकतम संख्याएँ ज्ञात करना चाहते हैं । आवश्यक तुलनाओं की संख्या की गणना के लिए एक पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात कीजिए ।

5

(ग) स्टिर्लिंग संख्या  $S_4^2$  की गणना कीजिए ।

2

3. (क) 1400 या इससे छोटे उन धन पूर्णाकों की संख्या ज्ञात कीजिए जो 3, 5 और 7 में से किसी से भी भाज्य नहीं हैं ।

5

(ख) निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध को हल कीजिए :

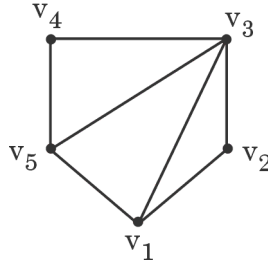
5

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3^n, n \geq 0$$



4. (क) नीचे दिए हुए ग्राफ के दो अतुल्याकारी जनक वृक्ष बनाइए। आगे, अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

4



- (ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित तर्क मान्य है या नहीं :

3

$$r \rightarrow p$$

$$p \vee r$$

$$p \rightarrow q$$

---

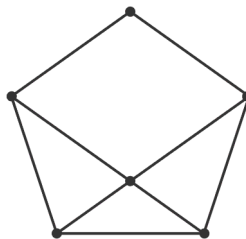

$$\therefore p \wedge q$$

- (ग) 20 आमों को 4 लोगों में इस प्रकार बाँटा जाना है कि प्रत्येक व्यक्ति को कम-से-कम एक आम मिल सके। यह काम कितने तरीकों से किया जा सकता है ?

3

5. (क) कम-से-कम रंगों का प्रयोग करके, नीचे दिए गए ग्राफ के शीर्ष और कोर रंजन दीजिए। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

3



(ख) निम्नलिखित बूलीय व्यंजक को DNF में समानीत कीजिए :

3

$$(x'_1 \wedge x_3) \vee (x'_2 \wedge x'_3)$$

(ग) अंग्रेज़ी में *विलोमपद* वह शब्द होता है जो बाएँ से दाएँ, या दाएँ से बाएँ एक ही जैसा पढ़ा जाए, जैसे कि ROTOR. मान लीजिए  $a_n$  लंबाई  $n$  वाले उन अंग्रेज़ी शब्दों (ज़रूरी नहीं कि उनका कोई अर्थ हो) की संख्या है जो विलोमपद हैं। हम एक अकेले अक्षर को भी विलोमपद मानते हैं।

4

(i)  $a_1$  और  $a_2$  क्या हैं ?

(ii)  $a_n$  के लिए एक पुनरावृत्ति स्थापित कीजिए।

(iii) जाँच कीजिए कि

$$a_n = (\sqrt{26})^n \left\{ \frac{1 + \sqrt{26}}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1 - \sqrt{26}}{2} \right\}$$

इस पुनरावृत्ति का हल है।

6. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित ग्राफ़ हैमिल्टोनीय है या नहीं।

2



(ख) सिद्ध कीजिए कि किसी भी अभाज्य संख्या  $p$  के लिए  $\sqrt{p}$  एक अपरिमेय संख्या है ।

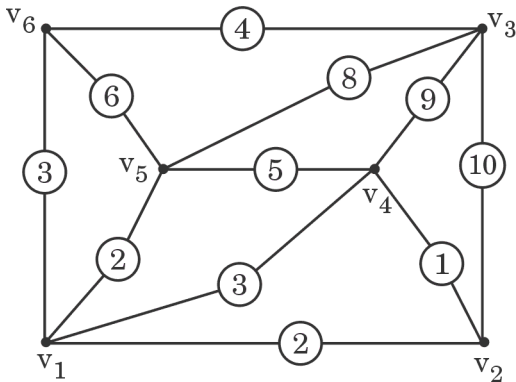
5

(ग) यदि कोई 5-अंकों की संख्या यादृच्छया चुनी जाती है, तो क्या प्रायिकता है कि इसके अंकों का गुणनफल 18 है ?

3

7. (क) निम्नलिखित ग्राफ़ में चक्र  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1)$  से प्रारंभ कीजिए । लघुकरण चरण को एक बार लागू करके अपेक्षाकृत कम भार वाला चक्र प्राप्त कीजिए ।

3



(ख) प्रारंभिक प्रतिबंधों  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 5$  के साथ पुनरावृत्ति

$$a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2} + 1$$

का जनक फलन ज्ञात कीजिए ।

5

(ग) पुष्टि के साथ, दो कथन इस प्रकार लिखिए कि  $q \rightarrow p$   
तो सत्य हो, लेकिन  $p \rightarrow q$  असत्य हो ।

2

---