No. of Printed Pages : 16 **BMTC-132**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BSCG)

Term-End Examination

June, 2022

BMTC-132 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) All questions in Section A and Section B are* ***compulsory****.*

(ii) In Section C, do any ***five*** *questions out of six questions.*

(iii) Use of calculators is not allowed.

Section—A

1. State whether the following statements are true *or* false. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 10×2=20

(i) A real-valued function of three variables which is continuous everywhere is differentiable.

(ii) The function $f(x, y) = \ln\left(\frac{x+y}{x}\right)$ is not a homogeneous function.

(iii) The cylindrical coordinates of the point whose spherical coordinates is $\left(8, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ is $\left(8, \frac{\pi}{6}, 0\right)$.

(iv) The unique solution $y(x)$ of an ordinary differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{for } x < 0 \\ 1, & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

exists $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

(v) The differential equation :

$$\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{5}{3}} = y''$$

is a second order differential equation of degree 3.

(vi) Differential equation :

$$\cos x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$$

in $]0, \pi[$ is a linear, homogeneous equation.

(vii) The total differential equation corresponding to the family of surfaces $x^3 z + x^2 y = c$, where c is a parameter is $3x^2 dz + x\left(y\,dx + x\,dy\right) = 0$.

(viii) Differential equation :

$$5x^2y^2z^2 = 2px^2y^2 + 5qx^2y^3 + 2pz^2 + 9x^2y^2$$

is a semi-linear partial differential equation of first order.

(ix) The differential equation :

$$v\frac{du}{dv} = e^{2v} + uv - u$$

has an integrating factor $v\exp(-v)$.

(x) The simultaneous differential equation of simple harmonic motion of a particle in phase-plane is :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-w^2x} = dt \text{ with } y(x_0) = y_0.$$

Section—B

2\. (a) Solve the differential equation : 4

$$\frac{dy}{dx}\frac{-\tan y}{(1+x)} = (1+x)e^x \sec y$$

(b) Show that the differential equation : 6

$$\left(y^2 + yz\right)dx + \left(z^2 + zx\right)dy + \left(y^2 - xy\right)dz = 0$$

is integrable and find its integral.

3\. (a) Solve the differential equation : 4

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2 + 2\ln x$$

(b) Using Charpit's method, find the complete integral of the differential equation : 6

$$p\left(1+q^2\right) + (b-z)q = 0,$$

b being a constant.

4\. (a) Find all the first order partial derivatives of the following function : 4

$$h(x, y, t) = e^{x-t}\cos(y+t).$$

What is the value of $\frac{\partial h}{\partial t}$ at $\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$?

(b) Find the limit of :

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

as $(x, y) \to (0, 0)$ along :

(i) $y = 3x$

(ii) $y = 5x$.

What can you conclude about $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? Justify your answer. 3

(c) If $\cos\alpha, \cos\beta$ and $\cos\gamma$ are the direction cosines of a line, then show that : 3

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

Section—C

5. (a) Solve the differential equation : 4

$$2x \frac{dy}{dx} + y\left(6y^2 - x - 1\right) = 0$$

(b) The rate of change of the price of a commodity is proportional to the difference between the demand D and the supply S. If $D = a - bP$ and $S = c \sin \beta t$, where a, b, c and β are constants, determine $P(t)$. It is given that at $t = 0, P = P_0$. 6

6. (a) Find the differential equations of the space curve in which the two families of surfaces :

$$u = x^2 + y^2 + 3z = c_1$$

and $$v = zx + x^2 + y^2 = c_2$$

intersect. 4

(b) Trnasform the given equation to Clairaut's form and hence find its general solution : 6

$$xy\left(y - px\right) = x - py$$

Also find its singular solution, if it exists.

7. (a) Find the envelope and the characteristic curves of the family of curves : 5

$$x^2 + \left(y - c\right)^2 + z^2 = c^2 \cos^2 \alpha,$$

c and α are constants.

(b) Using Lagrange's method, solve the differential equation : 5

$$\left(x^2 - y^2 - z^2\right) p + 2xyq = 2xz.$$

8. (a) Using the method of variation of parameters, solve the differential equation : 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec^3 x.$$

(b) Solve the differential equation : 5

$$\left(2xe^y y^4 + 2xy^3 + y\right) dx + \left(x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x\right) dy = 0$$

9. (a) Show that the limit of the function $f(x, y)$ exists at the origin, where :

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Do the repeated limits of $f(x, y)$ exist ? Justify your answer. 5

(b) For the function : 5

$$f(x, y) = x^3 + xy - 2y^2,$$

find the polynomial given by :

$$f_{xx}(1,2)(x-2)^2 + f_{xy}(1,2)$$
$$(x-2)(y-1) + f_{yy}(1,2)(y-1)^2$$

10. (a) If : 3

$$u = \cos\left(\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}\right),$$

then show that :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

(b) Show that the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ is continuous at $(0,0)$. Do the partial derivatives f_x and f_y exist at (0, 0) ? Justify your answer. 5

(c) Let $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ and $e_3 = (0,0,1)$. Let $x = 5e_1 - e_2 + 7e_3$, $y = e_1 - 5e_2 - e_3$ and $z = e_1 - e_2 - e_3$. Find $3x - 2y - z$. 2

BMTC-132

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. एस. सी. जी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2022

बी.एम.टी.सी.-132 : अवकल समीकरण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i)* भाग 'क' और भाग 'ख' के सभी प्रश्न **अनिवार्य** हैं।

(ii) भाग 'ग' के छः प्रश्नों में से किन्हीं ***पाँच*** *प्रश्नों को हल कीजिए।*

(iii) कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

भाग–क

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति **या** प्रति-उदाहरण दीजिए : 10×2=20

(i) तीन चरों वाला वास्तविक मान फलन, जो सर्वत्र संतत है, अवकलनीय होता है।

(ii) फलन :

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{x+y}{x}\right)$$

एक समघात फलन नहीं है।

(iii) गोलाकार निर्देशांक $\left(8, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ वाले बिन्द के बेलनाकार निर्देशांक $\left(8, \frac{\pi}{6}, 0\right)$ हैं।

(iv) साधारण अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{for } x < 0 \\ 1, & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

के अद्वितीय हल $y(x) \; \forall \, x \in \mathbf{R}$ का अस्तित्व है।

(v) अवकल समीकरण $\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{5}{3}} = y''$ घात 3 का द्वितीय कोटि अवकल समीकरण है।

(vi) अवकल समीकरण :

$$\cos x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$$

$]0, \pi[$ में रैखिक, समघात समीकरण है।

(vii) पृष्ठ–कल $x^3z + x^2y = c$, जहाँ c एक प्राचल है, के संगत संपर्ण अवकल समीकरण

$3x^2dz + x(y\,dx + x\,dy) = 0$ है।

(viii) अवकल समीकरण :

$$5x^2y^2z^2 = 2px^2y^2 + 5qx^2y^3 + 2pz^2 + 9x^2y^2$$

एक प्रथम कोटि का अर्ध–रैखिक आंशिक अवकल समीकरण है।

(ix) अवकल समीकरण $v\frac{du}{dv} = e^{2v} + uv - u$ का समाकलन गणक $v\exp(-v)$ होता है।

(x) प्रावस्था समतल में एक कण की सरल आवर्त गति का यगपत अवकल समीकरण :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-w^2 x} = dt\,,\; y(x_0) = y_0$$

है।

भाग—ख

2. (क) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 4

$$\frac{dy}{dx}\frac{-\tan y}{(1+x)} = (1+x)e^x \sec y$$

(ख) दिखाइए कि अवकल समीकरण : 6

$$\left(y^2 + yz\right)dx + \left(z^2 + zx\right)dy + \left(y^2 - xy\right)dz = 0$$

समाकलनीय है और इसका समाकल भी ज्ञात कीजिए।

3. (क) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 4

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2 + 2\ln x$$

(ख) चार्पिट विधि से अवकल समीकरण :

$$p\left(1+q^2\right) + (b-z)q = 0$$

का पर्ण समाकल ज्ञात कीजिए, जहाँ b एक अचर है। 6

4. (क) निम्नलिखित फलन के सभी प्रथम कोटि आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए : 4

$$h(x, y, t) = e^{x-t}\cos(y+t)$$

$\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ पर $\frac{\partial h}{\partial t}$ का मान क्या होगा ?

(ख) (i) $y = 3x$ (ii) $y - 5x$ के अनदिश सीमा $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ज्ञात कीजिए। $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ? अपने उत्तर की पष्टि कीजिए। 3

(ग) यदि $\cos\alpha, \cos\beta$ और $\cos\gamma$ एक रेखा की दिककोज्याएँ हैं, तब दिखाइए कि : 3

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

भाग—ग

5. (क) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 4

$$2x\frac{dy}{dx} + y\left(6y^2 - x - 1\right) = 0$$

(ख) एक वस्तु की कीमत की परिवर्तन दर माँग D और आपर्ति S के बीच के अंतर की समानपाती है। यदि $D = a - bP$ और $S = c\sin\beta t$, जहाँ a, b, c और β अचर हैं, तब $P(t)$ निर्धारित कीजिए। यह दिया गया है कि $t = 0$ पर $P = P_0$ है। 6

6. (क) उस आकाश वक्र के अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसमें दो पृष्ठ-कुल

$$u = x^2 + y^2 + 3z = c_1$$

और $$v = zx + x^2 + y^2 = c_2$$

प्रतिच्छेद करते हैं। 4

(ख) निम्नलिखित दिए गए समीकरण को क्लेरों रूप में रूपांतरित कीजिए और इस तरह इसका व्यापक हल ज्ञात कीजिए : 6

$$xy\left(y - px\right) = x - py$$

इसका विचित्र हल भी ज्ञात कीजिए, यदि इसका अस्तित्व हो तो।

7. (क) वक्र-कुल

$$x^2 + \left(y - c\right)^2 + z^2 = c^2\cos^2\alpha,$$

जहाँ c और α अचर है, के अन्वालोप और अभिलाक्षणिक वक्र ज्ञात कीजिए। 5

(ख) लैग्रांज विधि से निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 5

$$\left(x^2 - y^2 - z^2\right)p + 2xyq = 2xz$$

8. (क) प्राचल विचरण विधि द्वारा अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec^3 x$ को हल कीजिए। 5

(ख) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 5

$$\left(2xe^y y^4 + 2xy^3 + y\right)dx$$

$$+\left(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x\right)dy = 0.$$

9. (क) दिखाइए कि फलन $f(x, y)$ की सीमा का मलबिन्द पर अस्तित्व होता है, जहाँ :

$$f(x, y) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{y} + y\cos\dfrac{1}{x}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

क्या $f(x, y)$ की पनरावर्ती सीमाओं का अस्तित्व है ? अपने उत्तर की पष्टि कीजिए। 5

(ख) फलन :

$$f(x, y) = x^3 + xy - 2y^2$$

के लिए

$$f_{xx}(1,2)(x-2)^2 + f_{xy}(1,2)(x-2)(y-1) + f_{yy}(1,2)(y-1)^2$$

द्वारा दिया गया बहपद ज्ञात कीजिए। 5

10. (क) यदि :

$$u = \cos\left(\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}\right),$$

तब दिखाइए कि :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$ 3

(ख) दिखाइए कि :

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ बिन्द $(0,0)$ पर संतत है। क्या $(0,0)$ पर आंशिक अवकलजों f_x और f_y का अस्तित्व है ? अपने उत्तर की पष्टि कीजिए।

5

(ग) मान लीजिए $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ और $e_3 = (0,0,1)$. मान लीजिए $x = 5e_1 - e_2 + 7e_3$, $y = e_1 - 5e_2 - e_3$ और $z = e_1 - e_2 - e_3$. तब $3x - 2y - z$ ज्ञात कीजिए। 2