No. of Printed Pages : 12

BMTE-144

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BSCG/BAG)

Term-End Examination

June, 2022

BMTE-144 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 3 hours *Maximum Marks : 100*

Note : *Question number **1** is **compulsory**. Do any **8** questions from questions number **2** to **10**. Use of non-programmable scientific calculators is allowed.*

1. State whether the following statements are *true* or *false*. Give a short proof or a counter-example in support of your answer. *10×2=20*

(a) The equation $x^3 - 4x - 16 = 0$ has no root in the interval [3, 5].

(b) $\Delta E = E\Delta$, where E is the shift operator and Δ is the forward difference operator.

(c) Every 3×3 system of linear equations can be solved using the LU decomposition method.

(d) For the data (2, 4), (1, 5), (3, 6) the Newton's divided difference $f[x_0, x_1, x_2]$ is $\frac{3}{2}$.

(e) The Newton-Raphson method cannot be used to find a cube root of a positive real number.

(f) The eigenvalues of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ are 1 and 2.

(g) The sum of all the Lagrange's fundamental polynomials is a constant.

(h) If the IVP $\frac{dy}{dx} = 2xy$, $y(0) = 1$ is solved by the optimal R-K method of second order with $h = 0{\cdot}1$, then K_1 and K_2 are 0 and $\frac{1}{75}$, respectively.

(i) The equation $\frac{1}{y}\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ is a linear differential equation.

(j) For any data $\{(x_i, f_i) \,|\, i = 0, 1, 2, 3\}$, $\Delta^3 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$.

2. (a) Show that the system of linear equations

$$x_1 + 2x_3 = 3$$

$$3x_2 = 2$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11$$

is consistent. Hence, find its solution using the LU decomposition method. *4*

(b) Using Horner's method find $P(-1)$ and $P'(-1)$, where $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 10$. *3*

(c) Perform three iterations of Newton-Raphson method to approximate a root of the equation $f(x) = x^4 - x + 3 = 0$. You may take $x_0 = 0$ as the initial guess. *3*

3. (a) Estimate the value of f(2) from the following data using Lagrange's interpolation : *4*

x	– 1	0	1	3
f(x)	0	– 4	0	56

(b) Show by the principle of mathematical induction that $\Delta^n e^x = (e^h - 1)^n e^x$, where Δ is the forward difference operator. *3*

(c) The equation $x^2 + ax + b = 0$ has two real roots α and β such that $|\alpha|<|\beta|$. If we use the fixed point iteration $x_{n+1} = \dfrac{-b}{x_n + a}$ to find a root, then to which root does it converge ? *3*

4. (a) For the data

x_i	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
f_i	13	7	3	1	1	3	7

show that $\Delta^3 f_i = 0 \ \forall \ i = 0, 1, 2, 3.$ *4*

(b) Using the Taylor series method of second order, find the approximate value of $y(1{\cdot}4)$ for the IVP $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 1$. Take the step size $h = 0{\cdot}2$. *6*

5. (a) Obtain the approximate value of $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ using Simpson's rule with 3 and 5 nodal points. Obtain the improved value using the Romberg integration. *6*

(b) The equation $x^3 - x - 1 = 0$ has a root in the interval $]1, 2[$. Determine a suitable iteration function $g(x)$ so that the iteration method $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ converges to the root. Perform two iterations of this method with $x_0 = 1{\cdot}6$. *4*

6. (a) Perform three iterations of the inverse power method to obtain an eigenvalue of the following matrix A, which is nearest to 3 in magnitude :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Assume the initial approximation to the eigenvector as $(1, \ -1, \ 1)^T$. *7*

(b) Prove that $\mu^2 = 1 + \dfrac{\delta^2}{4}$. 3

7. (a) Using an appropriate interpolation formula, find the value of f(1·32) from the following table of values : 7

x	f(x)
1·1	1·3357
1·2	1·5095
1·3	1·6984
1·4	1·9043
1·5	2·1293

(b) Determine the spacing h in a table of equally spaced points between 2 and 5 that yields a five-place accuracy in the interpolation of the function $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ by a second degree polynomial. 3

8. (a) Show that the interpolating polynomial of degree at most n with nodes $x_0, x_1, ..., x_n$ can be written as

$$P_n(x) = w(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\, w'(x_k)},$$

where $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$. 5

(b) Find the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

using the Gauss-Jordan method. *5*

9. (a) Solve the system of linear equations

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4$$
$$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2$$

using the Gauss elimination method. *4*

(b) Use the Bisection method to find a root of the equation $x^3 - 4x + 1 = 0$. Starting with the interval [0, 1], stop the iterations if the interval width becomes smaller than 0·05. *6*

10. (a) Find an approximate value of $\sqrt[3]{26}$ using the Mean Value Theorem. *6*

(b) Without computing the eigenvalues of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

prove that the eigenvalues satisfy the inequality $0 \leq \lambda \leq 10$. *4*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.एस.सी.जी./बी.ए.जी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2022

बी.एम.टी.ई.-144 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *प्रश्न संख्या **1** करना **अनिवार्य** है । प्रश्न संख्या **2** से **10** में से किन्हीं **8** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । अप्रोग्रामीय वैज्ञानिक कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति है ।*

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तर की पुष्टि के लिए एक लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए । *10×2=20*

(क) समीकरण $x^3 - 4x - 16 = 0$ का अंतराल [3, 5] में कोई मूल नहीं है ।

(ख) $\Delta E = E\Delta$, जहाँ E स्थानांतरी संकारक और Δ अग्रांतर संकारक हैं ।

(ग) प्रत्येक 3×3 रैखिक समीकरण निकाय LU वियोजन विधि से हल किया जा सकता है ।

(घ) आंकड़ों (2, 4), (1, 5), (3, 6) के लिए न्यूटन विभाजित अंतर $f[x_0, x_1, x_2]$ का मान $\frac{3}{2}$ है ।

(ङ) न्यूटन-रैफ्सन विधि से किसी धन वास्तविक संख्या का घनमूल ज्ञात नहीं किया जा सकता है ।

(च) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ के आइगेनमान 1 और 2 हैं ।

(छ) सभी लग्रांज मूलभूत बहुपदों का योगफल एक अचर है ।

(ज) यदि आदि मान समस्या $\frac{dy}{dx} = 2xy,\ y(0) = 1$ को द्वितीय कोटि इष्टतम R-K विधि से $h = 0{\cdot}1$ लेकर हल किया जाता है, तो K_1 और K_2 के मान क्रमशः 0 और $\frac{1}{75}$ हैं ।

(झ) समीकरण $\frac{1}{y}\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ एक रैखिक अवकल समीकरण है ।

(ञ) किन्हीं भी आंकड़ों $\{(x_i, f_i) | i = 0, 1, 2, 3\}$ के लिए $\Delta^3 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$ होता है ।

2. (क) दिखाइए कि रैखिक समीकरण निकाय

$$x_1 + 2x_3 = 3$$

$$3x_2 = 2$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11$$

संगत है । अतः LU वियोजन विधि से इसका हल ज्ञात कीजिए । *4*

(ख) हॉर्नर विधि से $P(-1)$ और $P'(-1)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 10$ है । *3*

(ग) समीकरण $f(x) = x^4 - x + 3 = 0$ के एक मूल का सन्निकटन ज्ञात करने के लिए न्यूटन-रैफ्सन विधि की 3 पुनरावृत्तियाँ कीजिए । आप प्रारंभिक अनुमान $x_0 = 0$ ले सकते हैं । *3*

3. (क) लग्रांज अंतर्वेशन के प्रयोग से निम्नलिखित आंकड़ों से f(2) का मान आकलित कीजिए : *4*

x	– 1	0	1	3
f(x)	0	– 4	0	56

(ख) गणितीय आगमन के सिद्धांत से दिखाइए कि $\Delta^n e^x = (e^h - 1)^n e^x$, जहाँ Δ अग्रांतर संकारक है । *3*

(ग) समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के दो वास्तविक मूल α और β इस प्रकार हैं कि $|\alpha|<|\beta|$ है । यदि हम एक मूल ज्ञात करने के लिए नियत बिन्दु पुनरावृत्ति $x_{n+1} = \dfrac{-b}{x_n + a}$ का प्रयोग करें, तो यह किस मूल को अभिसरित होगी ? *3*

4. (क) आंकड़ों

x_i	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
f_i	13	7	3	1	1	3	7

के लिए दिखाइए कि सभी i = 0, 1, 2, 3 के लिए $\Delta^3 f_i = 0$ है । *4*

(ख) द्वितीय कोटि की टेलर श्रेणी विधि का प्रयोग करके, आदि मान समस्या $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 1$ के लिए $y(1{\cdot}4)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए । पग लंबाई $h = 0{\cdot}2$ लीजिए । *6*

5. (क) 3 और 5 सोपान बिन्दुओं वाले सिम्प्सन नियम से

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए ।

रॉम्बर्ग समाकल से सुधारा गया मान प्राप्त कीजिए । *6*

(ख) समीकरण $x^3 - x - 1 = 0$ का अंतराल $]1, 2[$ में एक मूल है । एक उचित पुनरावृत्ति फलन $g(x)$ इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि पुनरावृत्ति विधि $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ उस मूल को अभिसरित होती हो । $x_0 = 1{\cdot}6$ लेकर इस विधि की दो पुनरावृत्तियाँ दीजिए । *4*

6. (क) निम्नलिखित आव्यूह A का परिमाण में 3 के निकट आइगेनमान ज्ञात करने के लिए व्युत्क्रम घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ दीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

आइगेनसदिश के लिए प्रारंभिक सन्निकटन $(1,\ -1,\ 1)^T$ मान कर चलिए । *7*

(ख) सिद्ध कीजिए कि $\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}$ है । 3

7. (क) एक उपयुक्त अंतर्वेशन सूत्र का प्रयोग करके निम्नलिखित मान सारणी से f(1·32) का मान ज्ञात कीजिए : 7

x	f(x)
1·1	1·3357
1·2	1·5095
1·3	1·6984
1·4	1·9043
1·5	2·1293

(ख) 2 और 5 के बीच में समदूरी बिन्दुओं की एक सारणी में दूरी h इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि फलन $f(x) = x + \frac{1}{x}$ के एक द्वितीय कोटि बहुपद द्वारा अंतर्वेशन में 5-स्थान की शुद्धता हो । 3

8. (क) दिखाइए कि सोपान बिन्दुओं $x_0, x_1, ..., x_n$ के साथ अधिकतम n घात वाले अंतर्वेशन बहुपद को

$$P_n(x) = w(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\, w'(x_k)}$$

के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$ है । 5

(ख) गाउस-जॉर्डन विधि से आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । *5*

9. (क) रैखिक समीकरण निकाय

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4$$
$$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2$$

को गाउस विलोपन विधि से हल कीजिए । *4*

(ख) समीकरण $x^3 - 4x + 1 = 0$ का एक मूल ज्ञात करने के लिए समद्विभाजन विधि का प्रयोग कीजिए । अंतराल $[0, 1]$ से प्रारंभ करके, जब अंतराल की लंबाई $0{\cdot}05$ से कम हो जाती है तब पुनरावृत्ति बंद कीजिए । *6*

10. (क) मध्यमान प्रमेय का प्रयोग करके $\sqrt[3]{26}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमानों की गणना किए बिना सिद्ध कीजिए कि आइगेनमान असमिका $0 \le \lambda \le 10$ को संतुष्ट करते हैं । *4*