No. of Printed Pages : 20 **BMTE-141**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME UNDER UGC-CBCS (BSCG)

Term-End Examination

June, 2022

BMTE-141 : LINEAR ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : (*i*) *Answer all the questions in Section A and Section B.*

(*ii*) *Answer any* ***five*** *questions in Section C.*

Section—A

(Compulsory Question)

1. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer, respectively, with a short proof or a counter example. 10

(i) If α and β are eigenvalues of two $n \times n$ matrices A and B, respectively, then $\alpha + \beta$ is an eigenvalue for A + B.

(ii) If S and T are linear transformations such that SoT is injective, then S is 1 – 1.

(iii) $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} : ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2))$

$$= (x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2)$$

is an inner product on $\mathbf{R}^3$.

(iv) Any subset of a vector space that does not contain the zero element is linearly independent.

(v) No non-zero skew-symmetric matrix is diagonalisable.

(vi) If A and B are $n \times n$ matrices and AB = BA, we have $A^t B^t = B^t A^t$.

(vii) If $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbf{R}^3, \underline{u} \neq 0, \underline{v} \neq 0$, then $\underline{u}.\underline{v} \neq 0$.

(viii) The matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ has a unique Row Echelon form.

(ix) The projection operator $pr_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ is injective.

(x) Every unitary operator is invertible.

Section—B

(Answer all the questions.)

2. (a) Define the coset of a subspace. Let :

$$W = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\} \subseteq \mathbf{R}^3.$$

Check whether the vectors (3, 3, 1) and (1, 0, 0) are in the same coset of W or not. 3

(b) Check whether the vectors (1, 1, 1), (1, 1, –1) and (–1, –1, 3) are linearly independent. 3

(c) If the matrix of a linear transformation $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ with respect to the standard basis is :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

find the linear transformation. 2

(d) Check whether the vector :

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

is an eigenvector for the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

If 'yes', what is the corresponding eigenvalue ? If 'no', can you change one coordinate of v to get an eigen vector of the matrix A ? 2

3. (a) Find the equation of the plane corresponding to the vector space spanned by $\{(1, -1, -1), (1, 0, 1)\}$. 3

(b) Check that the matrix $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ satisfies the equation $(x - 1)^2 = 0$. 2

(c) Find the adjoint of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Hence find its inverse. 5

4. (a) Let :

$$A = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 3 & b \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2a & -1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

and $$C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Are these values a and b such that AB = C ? If 'yes', find them. If 'no' justify your answer. 3

(b) Obtain an orthonormal basis for $\mathbf{R}^3$ by applying Gram-Schmidt orthogonalisation process to the ordered basis : 5

$$\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$$

(c) Let B be the standard basis for $\mathbf{R}^3$ and B′ be another basis such that

$$M_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Find B′. 2

Section—C

5\. (a) Consider the linear operator $T : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ defined by

$$T\left(\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right)\right) = \left(z_3, iz_1, iz_2, -iz_4\right)$$

Find $T^*\left(w_1, w_2, w_3, w_4\right)$ where $w_i \in \mathbf{C}\ \forall\, i = 1, 2, 3, 4$ and check whether T is self adjoint under the standard inner product on $\mathbf{C}^4$. Further, check if T is unitary. 6

(b) Find the rank and nullity of the matrix : 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

using row reduction.

6\. (a) Let :

$$B = \{(1, -1, 1), (1, -1, -1), (1, 1, 0)\}$$

and $B' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, -1)\}$

be two bases of $\mathbf{R}^3$. Find $M_{B'}^{B}$. 7

(b) Let V_1 be the subspace of all $n \times n$ hermitian matrices and let V_2 be the subspace of $n \times n$ skew-hermitian matrices. Show that : 3

$$M_n(\mathbf{C}) = V_1 + V_2.$$

7\. (a) Check whether or not the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. If it is, find a matrix P and a diagonal matrix D such that $P^{-1}AP = D$. If A is not diagonalisable, find Adj (A). 7

(b) Find the signature of the quadratic forms :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

and $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Are these forms equivalent ? Justify your answer. 3

8. (a) Let :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\},$$

$$B = \{(0, 0, x \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

Check that A and B are subspaces of $\mathbf{R}^3$ and $\mathbf{R}^3 = A \oplus B$. 7

(b) Explain why the following matrix is not in row reduced echelon form :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Also, reduce it to Row Reduced Echelon form. 3

9. (a) Find the orthogonal and normal canonical reductions of the quadratic form $7x^2 + 6xy + 7y^2$. Hence identify the conic represented by $7x^2 + 6xy + 7y^2 = 200$. Also, find the principal axes of the given quadratic form. 7

(b) Find the vector equation of the plane determined by the points (1, –2, 1) (1, 0, 1) and (1, –1, 1). Also, check whether $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ lies on it. 3

10. (a) Consider the subspaces :

$$V_1 = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right],$$

$$V_2 = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}\right]$$

of $\mathbf{R}^3$.

Find a basis of $V_1 + V_2$ and a spanning set for $V_1 \cap V_2$. 8

(b) Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ be the linear operator defined by $T(x, y) = (x + y, x - 2y)$. Find the matrix of the operator T with respect to the basis {(1, 1), (1, 0)}. 2

11. (a) Consider the basis $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1)$ and $e_3 = (0, 0, 1)$ of $\mathbf{R}^2$ over $\mathbf{R}$. Find the dual basis of $\{e_1, e_2, e_3\}$. 4

(b) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Also, find A^{-1} if it exists. 4

(c) Find the minimal polynomial of $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. 2

BMTE-141

विज्ञान स्नातक (सामान्य) (बी. एस. सी. जी.)

सत्रांत परीक्षा

जन. 2022

बी. एम. टी. ई.-141 : रैखिक बीजगणित

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : (*i*) भाग 'क' और भाग 'ख' में सभी प्रश्न कीजिए।

(*ii*) भाग 'ग' में कोई ***पाँच*** प्रश्न कीजिए।

भाग—क

(अनिवार्य प्रश्न)

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि क्रमशः, एक लघु उपपत्ति या प्रति उदाहरण द्वारा कीजिए। 10

(i) यदि α और β, क्रमशः, दो $n \times n$ आव्यूह A और B के आइगेन मान हैं, तो $\alpha + \beta$ आव्यूह $A + B$ का आइगेन मान होगा ।

(ii) यदि S और T दो ऐसे रैखिक रूपान्तरण हैं जिसके लिए SoT एकैकी है, तो S भी एकैकी होगा।

(iii) $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} : \left((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\right)$

$$= (x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2)$$

$\mathbf{R}^3$ पर एक आंतर गणनफल है।

(iv) कोई भी सदिश समष्टि का उप-समच्चय, जो शन्य अवयव को आविष्ट नहीं करता, रैखिकत: स्वतन्त्र होता है।

(v) कोई भी शन्येतर, विषम सममित आव्यह विकर्णनीय नहीं है।

(vi) यदि A और B $n \times n$ आव्यह हैं और $AB = BA$ है, तो $A^tB^t = B^tA^t$ होगा।

(vii) यदि $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbf{R}^3, \underline{u} \neq 0, \quad \underline{v} \neq 0,$ तो $\underline{u}.\underline{v} \neq 0$ होगा।

(viii) आव्यह $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ का अद्वितीय पंक्ति सोपानक रूप है।

(ix) प्रक्षेप संकारक $pr_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ एकैकी है।

(x) प्रत्येक ऐकिक संकारक व्युत्क्रमणीय होता है।

भाग—ख

(सभी प्रश्नों को हल कीजिए।)

2. (क) एक उप-सदिश समष्टि की सहसमच्चय परिभाषित कीजिए। मान लीजिए :

$$W = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

है। जाँच कीजिए कि सदिश (3, 3, 1) और (1, 0, 0) एक ही उपसमच्चय में हैं या नहीं। 3

(ख) जाँच कीजिए कि सदिश (1, 1, 1), (1, 1, −1) और $(-1, -1, 3)$ रैखिकत: स्वतन्त्र हैं या नहीं। 3

(ग) मानक आधार के सापेक्ष रैखिक रूपान्तरण $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ का आव्यह $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ है, तो रैखिक रूपान्तरण निकालिए। 2

(घ) जाँच कीजिए कि सदिश $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ आव्यह

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ का आइगेन सदिश है या नहीं। यदि 'हाँ' तो संगत आइगेन मान क्या है ? यदि 'नहीं' तो, क्या v का एक निर्देशांक बदल कर A का एक आइगेन सदिश पा सकते हैं ? 2

3. (क) सदिश $\{(1, -1 - 1), (1, 0, 1)\}$ द्वारा विस्तत सदिश समष्टि की संगत समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 3

(ख) जाँच कीजिए कि आव्यह $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ समीकरण $(x-1)^2 = 0$ को संतष्ट करता है या नहीं। 2

P. T. O.

(ग) आव्यह $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ का सारणिक निकालिए। इससे आव्यह की व्यत्क्रम निकालिए। 5

4. (क) मान लीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 3 & b \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2a & -1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

और $C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ है।

क्या a और b के ऐसे मान हैं जिसके लिए $AB = C$ है ? यदि 'हाँ' तो उन मानों को निकालिए। यदि 'नहीं' तो अपने उत्तर की पष्टि कीजिए। 3

(ख) क्रमित आधार $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ पर ग्राम-श्मिट लांबिकीकरण प्रक्रम विधि का प्रयोग करके एक प्रासामान्य लांबिक आधार निकालिए। 5

(ग) मान लीजिए B $\mathbf{R}^3$ का मानक आधार है और B′ दसरा आधार है जिसके लिए

$$M_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ है। B′ ज्ञात कीजिए। 2

भाग—ग

5\. (क) $T : C_4 - C_4, T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_3, iz_1, iz_2, -iz_4)$ द्वारा परिभाषित रैखिक संकारक लीजिए। $T^*(w_1, w_2, w_3, w_4)$ ज्ञात कीजिए जहाँ $\forall i = 1, 2, , 3, 4$ के लिए $w_i \in \mathbf{C}$ है। जाँच कीजिए कि $\mathbf{C}^4$ पर मानक आंतर गणनफल के सापेक्ष T स्वसंलग्न संकारक है या नहीं। आगे यह भी जाँच कीजिए कि T ऐकिक है या नहीं। 6

(ख) पंक्ति समानयन द्वारा आव्यह

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

की जाति और शन्यता ज्ञात कीजिए। 4

6\. (क) मान लीजिए :

$$B = \{(1, -1, 1), (1, -1, -1), (1, 1, 0)\}$$

और

$$B' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, -1)\}$$

$\mathbf{R}^3$ के आधार हैं। $M_{B'}^{B}$ ज्ञात कीजिए। 7

(ख) मान लीजिए V_1 सभी $n \times n$ हर्मिटी आव्यहों की सदिश उपसमष्टि है और V_2 सभी $n \times n$ हर्मिटी आव्यहों की उपसमष्टि है। दिखाइए कि $M_n(\mathbf{C}) = V_1 + V_2$।

7. (क) जाँच कीजिए कि आव्यह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

विकर्णनीय है या नहीं। यदि विकर्णनीय है, तो एक आव्यह P और एक विकर्ण आव्यह D निकालिए जिससे $P^{-1}AP = D$ हो। यदि A विकर्णनीय नहीं है, तो $\text{Adj}(A)$ निकालिए। 7

(ख) द्विघाती समघात

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

और $$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

के चिह्नक निकालिए। क्या यह समघात तल्य हैं ? अपने उत्तर की पष्टि कीजिए। 3

8. (क) मान लीजिए

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\right\},$$

$$B = \left\{(0, 0, x \mid x \in \mathbf{R}\right\}$$

है। दिखाइए कि A और B, $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टियाँ हैं और $\mathbf{R}^3 = A \oplus B$। 7

(ख) कारण बताइए कि निम्नलिखित आव्यह क्यों पंक्ति समानीत सोपानक रूप में नहीं है :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

पंक्ति समानीत सोपानक रूप में समानीत भी कीजिए। 3

9. (क) द्विघाती समघात

$$7x^2 + 6xy + 7y^2$$

के लांबिक और प्रासामान्य विहित समानयन ज्ञात कीजिए। इस तरह $7x^2 + 6xy + 7y^2 = 200$ द्वारा निरूपित शांकव पहचानिए। दिए गए द्विघाती समघात के मख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए। 7

(ख) बिन्दओं $(1, -2, 1), (1, 0, 1)$ और $(1, -1, 1)$ द्वारा निर्धारित समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। यह भी जाँच कीजिए कि क्या $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ उस समतल पर स्थित है।

10. (क) $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टियाँ

$$V_1 = \left[\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}\right],$$

और $V_2 = \left[\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}\right\}\right]$ लीजिए।

$V_1 + V_2$ के लिए एक आधार और $V_1 \cap V_2$ के लिए एक विस्ततीय समच्चय ज्ञात कीजिए। 8

(ख) मान लीजिए

$$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ T\,(x, y) = (x + y, x - 2y)$$

द्वारा परिभाषित रैखिक संकारक है। आधार $\{(1,1),(1,0)\}$ के सापेक्ष संकारक T की आव्यह निकालिए। 2

11. (क) $\mathbf{R}$ पर सदिश समष्टि $\mathbf{R}^3$ का आधार $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (0,0,1)$ लीजिए। $\{e_1, e_2, e_3\}$ का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए। 4

(ख) निम्नलिखित आव्यह A के लिए केली–हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

यदि A^{-1} का अस्तित्व है, तो इसे भी ज्ञात कीजिए। 4

(ग) आव्यह $\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$ का अल्पिष्ट बहपद ज्ञात कीजिए। 2