

No. of Printed Pages : 11

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B. Sc.)

Term-End Examination

June, 2020

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN

PHYSICS—III

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) Attempt all questions.

(ii) The marks for each question are indicated against it.

(iii) Symbols have their usual meanings.

1. Attempt any *five* parts : 2 each

(a) Show that the matrix :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

is both hermitian and unitary.

(b) Obtain the Laplace transform of the function $f(t) = t$.

P. T. O.

- (c) Show that :

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

- (d) Using Rodrigue's representation for Hermite polynomials :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}),$$

determine $H_2(x)$.

- (e) Determine the domain over which the function $f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 2}$ is analytic.

- (f) Write down transformation law obeyed by the components of (i) a contravariant tensor of rank two and (ii) a mixed tensor of rank two.

- (g) Does the set of all non-negative integers (0, 1, 2, 3,.....) form a group under addition ? Explain.

- (h) Obtain the Fourier transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2. Attempt any *two* parts : 5 each
- (a) Determine the eigen values and the eigen vectors of the matrix :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- (b) Show that the dot product of two 3-D vectors is a scalar.
- (c) State the four conditions to be satisfied in order that a set $G = \{x, y, z, \dots\}$ endowed with a binary law of composition of its elements forms a group.

Show that the set of all non-singular square matrices of order n form a group under matrix multiplication.

3. Attempt any *two* parts : 5 each

- (a) Obtain the analytic function whose real part is :

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

- (b) Calculate the value of the contour integral,

$$\oint_C \frac{z dz}{(z-2)(z^2+9)}$$

where C is a circle defined by $|z| = 4$.

- (c) Obtain the Laurent series expansion of the function $\frac{\cos z}{z}$ in the neighbourhood of the singular points and calculate the residues.

4. Attempt any *two* parts : 5 each

- (a) Obtain the Laplace transform of $t \cos pt, p \neq 0$.
- (b) Calculate the inverse Laplace transform of the function :

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 - 6s}$$

- (c) Obtain the Fourier transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

5. Attempt any *one* part : 10

- (a) Write down the Legendre differential equation.

Hence prove that for the Legendre polynomials of n th order $P_n(x)$ and m th order $P_m(x)$:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0, \text{ if } m \neq n.$$

- (b) Bessel function of the first kind of order m is represented by :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

Show that :

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \cos x$$

PHE-14

विज्ञान स्नातक (बी. एस-सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2020

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) सभी प्रश्न हल कीजिए।

(ii) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

(iii) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. कोई पाँच भाग कीजिए :

प्रत्येक 2

(क) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

हर्मिटी और ऐकिक दोनों है।

(ख) फलन $f(t) = t$ का लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए।

(ग) सिद्ध कीजिए कि :

$$-\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

(घ) निम्नलिखित हर्मिट बहुपदों के रोड्रिगेज निरूपण का उपयोग कर

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}),$$

$H_2(x)$ का निर्धारण कीजिए।

(ङ) उस प्रांत का निर्धारण कीजिए जिसमें फलन

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 2} \text{ विश्लेषिक है।}$$

(च) (i) कोटि 2 के प्रतिपरिवर्ती टेन्सर, और

(ii) कोटि 2 के मिश्र टेन्सर के घटकों द्वारा

अनुपालित रूपान्तरण नियम लिखिए।

(छ) क्या योग के अधीन सभी पूर्णाकों का समुच्चय $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ एक समूह होता है ? व्याख्या कीजिए।

(ज) निम्नलिखित फलन का फूरिये रूपान्तर प्राप्त कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2. कोई दो भाग कीजिए : प्रत्येक 5

(क) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेन मानों और आइगेन सदिशों का निर्धारण कीजिए :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि दो त्रिविम सदिशों का अदिश गुणनफल एक अदिश होता है।

(ग) समुच्चय $G = \{x, y, z, \dots\}$, जिसके अवयव द्वयी संयोजन नियम का पालन करते हैं, एक समूह बना सके, इसके लिए आवश्यक चार प्रतिबंध लिखिए। सिद्ध कीजिए कि आव्यूह गुणन के अधीन कोटि n वाले सभी व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूहों का समुच्चय एक समूह होता है।

3. कोई दो भाग कीजिए : प्रत्येक 5

(क) विश्लेषिक फलन प्राप्त कीजिए जिसका वास्तविक भाग $u(x, y) = e^x \cos y$ है।

(ख) कंटूर समाकल :

$$\oint_C \frac{z \, dz}{(z-2)(z^2+9)}$$

का मान परिकलित कीजिए, जहाँ कंटूर C , $|z| = 4$ को परिभाषित करने वाला वृत्त है।

(ग) विचित्र बिन्दुओं के प्रतिवेश में फलन $\frac{\cos z}{z}$ का

लौरां श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए और अवशिष्टों की

गणना कीजिए।

4. कोई दो भाग कीजिए :

प्रत्येक 5

(क) $t \cos pt, p \neq 0$ का लाप्लास रूपांतर प्राप्त

कीजिए।

(ख) फलन :

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 - 6s}$$

का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए।

(ग) फलन :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

का फूरिये रूपांतर प्राप्त कीजिए।

5. कोई एक भाग कीजिए :

प्रत्येक 10

(क) लेजैन्ड्रे अवकल समीकरण लिखिए।

अतएव m वें घात वाले लेजैन्ड्रे बहुपदों $P_m(x)$

और n वें घात वाले लेजैन्ड्रे बहुपदों $P_n(x)$ के

लिए सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

यदि $m \neq n$ है।

(ख) कोटि m वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलनों को

निम्नलिखित व्यंजक द्वारा निरूपित किया जाता

है :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \cos x$$