No. of Printed Pages : 16

MTE-14

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2020

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Attempt any five questions.*

(ii) All questions carry equal marks.

(iii) Use of calculators is not allowed.

---

1. (a) A particle moving in a straight line is subjected to a resistance which produces the retardation kV^3, where V is the velocity of the particle at any time t and k is a constant. Show that the velocity V and the time t are given in terms of distance s by the equation : 4

$$V = \frac{u}{1 + ksu}$$

and $$t = \frac{s}{u} + \frac{1}{2}ks^2$$

where initial velocity at $t = 0$ is u.

(b) Consider the following systems of differential equations representing a prey and predator population model : 6

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y$$

and $$\frac{dy}{dt} = x + y$$

(i) Identify all the real critical points of the system of equations given above.

(ii) Obtain the type and stability of these critical points.

2. (a) If a simple pendulum of length l oscillates through an angle α on either side of the mean position, then find the angular velocity $\frac{d\theta}{dt}$ of the pendulum, where θ is the angle which the string makes with the vertical. 4

(b) Find the value and the optimum strategies for two players A and B of the game whose pay off matrix is given below :

	Player B		
	1	–1	–1
Player A	–1	–1	3
	–1	2	–1

Also find the value of the game. 6

3. (a) The population of fish in a reservoir is affected by both fishing and restocking. The proportionate birth rate is constant at 0.4 per year and proportionate death rate is constant at 0.5 per year. The reservoir is restocked at constant rate of 2000 fishes per year and fishermen are allowed to catch 1000 fishes per year. Using these assumptions, derive a model for the fish population and solve it. Describe the long-term behaviour of the fish population when the initial population is 5000. 5

(b) At any instant, a particle is projected with a velocity u making an angle α with the horizontal direction. After a certain interval t, the direction of its path makes an angle β with horizontal direction. Prove that :

$$u \cos \alpha = \frac{gt}{(\tan \alpha - \tan \beta)}$$

Further prove that direction of motion turns through an angle θ in time :

$$\frac{u \sin \theta}{g \cos (\theta - \alpha)}$$

where $\theta = \alpha - \beta$. 5

4. (a) Consider arterial blood viscosity $\mu = 0.025$ poise. If the length of the artery is 1.5 cm, radius 8×10^{-3} cm and $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dyne/cm^2, then find (i) the maximum peak velocity of blood, and (ii) the shear stress at the wall. 5

(b) Stokes' law states that for the spherical droplets falling in motionless air and having a diameter D < 0.762 cm, the acceleration due to gravity is opposed by an amount proportional to the velocity of the raindrop, specially by an amount equal to :

$$\left(\frac{0.329 \times 10^{-5}}{D^2}\right)\frac{dx}{dt}.$$

Using this fact, find the terminal velocity of a droplet of radius 0.3 cm. 3

(c) Define discrete and continuous models, giving an example of each. 2

5. (a) Assume that the moon is at a distance of 300000 km from earth and that it takes 28 days for it to orbit the earth once. Geostationary satellite are those which are at rest relative to the earth. Using these two statements, and Kepler's 3rd law derive the altitude of the geostationary satellite from the centre of the earth. 5

(b) Consider a single server queuing system with Poisson input, exponential service times. Suppose that the mean arrival rate is 3 calling units per hour. The expected service time is 0.25 hours and the maximum permissible calling units in the system is two.

Find : 5

(i) the probability when the system is idle.

(ii) expected number of calling units in the system.

6\. (a) Suppose a string of length l is connected to a fixed point at one end and to a stick of mass m at the other. The stick is whirling in a circle at a constant velocity V. Using dimensional analysis, find the force in the string. 4

(b) The return distribution of securities 1 and 2 is as follows : 6

Event (j)	Chance $P_{1j} = P_{2j}$	Returns	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0.33	19	18
2	0.25	17	16
3	0.17	11	11
4	0.25	10	9

Find which security is more risky in the Markowitz's sense.

7. (a) Discuss the following market which is characterized by lagged supply response : 3

$$D_t = 30 - 9p_t$$

$$S_t = 3 + 12p_{t-1}$$

(b) Find the output yielding maximum profit for the cost function :

$$C = 0.7x^3 - 0.8x^2 + 12x + 9$$

given that the cost price of x is ₹ 45 per unit. 3

(c) Write ***four*** factors that are used to compare two portfolios. 2

(d) Write ***two*** limitations of a Gaussian plume model in its application to real world problems. 2

MTE-14

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2020

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i)* किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

(iii) कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) सरल रेखा में गतिमान एक कण पर प्रतिरोध लगाने से विलंबन kV^3 उत्पन्न होता है, जहाँ V किसी भी समय t पर कण का वेग है और k

एक अचर है। दिखाइए कि दूरी s के पदों में वेग V और समय t निम्नलिखित समीकरणों द्वारा प्राप्त हैं : 4

$$V = \frac{u}{1 + ksu}$$

और $$t = \frac{s}{u} + \frac{1}{2}ks^2$$

जहाँ u, $t = 0$ पर कण का प्रारम्भिक वेग है।

(ख) निम्नलिखित अवकल समीकरण निकाय लीजिए जो शिकार और परभक्षी के जनसंख्या निदर्श को निरूपित करता है : 6

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y$$

और $$\frac{dy}{dt} = x + y$$

(i) ऊपर दिए गए समीकरण निकाय के सभी वास्तविक क्रांतिक बिन्दु ज्ञात कीजिए।

(ii) इन क्रांतिक बिन्दुओं के प्रकार और स्थायित्व प्राप्त कीजिए।

2. (क) यदि लम्बाई l का एक सरल लोलक माध्य स्थिति के दोनों ओर कोण α पर दोलायमान है, तो लोलक का कोणीय वेग $\frac{d\theta}{dt}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ θ वह कोण है जो डोरी ऊर्ध्वाधर के साथ बनाती है। 4

(ख) दो खिलाड़ियों A और B के खेल का मान और उनकी अनुकूलतम युक्तियाँ ज्ञात कीजिए जिसकी भुगतान आव्यूह नीचे दी गयी है :

	खिलाड़ी B		
	1	–1	–1
खिलाड़ी A	–1	–1	3
	–1	2	–1

खेल का मान भी ज्ञात कीजिए। 6

3\. (क) एक जलाशय में मछलियों की संख्या (समष्टि) मछली पकड़ने और जलाशय में मछलियों के पुनःस्थापन से प्रभावित होती है। आनुपातिक जन्म दर 0.4 प्रति वर्ष पर अचर है और आनुपातिक मृत्यु दर 0.5 प्रति वर्ष पर अचर है। जलाशय को 2000 मछलियाँ प्रति वर्ष की अचर दर पर पुनःस्थापित किया जाता है और मछुआरों को 1000 मछलियाँ प्रति वर्ष पकड़ने की अनुमति दी जाती है। इन धारणाओं के आधार पर मछली समष्टि के लिए निदर्श व्युत्पन्न कीजिए और उसे हल कीजिए। ज़ब प्रारंभिक समष्टि 5000 हो, तो मछली समष्टि के दीर्घकालिक व्यवहार का वर्णन कीजिए। 5

(ख) किसी भी क्षण, एक कण को वेग u के साथ क्षैतिज दिशा के साथ कोण α बनाते हुए प्रक्षेपित

किया जाता है। कुछ अन्तराल t के बाद पथ की दिशा क्षैतिज दिशा के साथ कोण β बनाती है। सिद्ध कीजिए कि :

$$u \cos \alpha = \frac{gt}{(\tan \alpha - \tan \beta)}$$

इसके आगे, यह भी सिद्ध कीजिए कि गति की दिशा समय :

$$\frac{u \sin \theta}{g \cos (\theta - \alpha)}, \text{ जहाँ } \theta = \alpha - \beta$$

में कोण θ के बराबर मुड़ जाती है। 5

4. (क) धमनीय रक्त श्यानता $\mu = 0.025$ पॉयज है। यदि धमनी की लम्बाई 1.5 सेमी, त्रिज्या 8×10^{-3} सेमी. और $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dyne/cm^2 हो, तो : 5

(i) रक्त का अधिकतम शिखर वेग ज्ञात कीजिए।

(ii) धमनी की दीवार पर आरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए।

(ख) स्टोक्स नियम के अनुसार, गतिहीन वायु में गिर रहे गोल वर्षा-बिन्दु, जिनका व्यास D < 0.762 सेमी. है, के गुरुत्व-त्वरण के विरोध की मात्रा बिन्दु के वेग के समानुपाती होती है। यह मात्रा

$$\left(\frac{0.329 \times 10^{-5}}{D^2}\right)\frac{dx}{dt}$$

होती है। इस तथ्य का प्रयोग करके त्रिज्या 0.3 सेमी. वाली वर्षा-बिन्दु का चरम वेग ज्ञात कीजिए। 3

(ग) असतत् और सतत निदर्शन को प्रत्येक का **एक-एक** उदाहरण देते हुए, परिभाषित कीजिए। 2

5. (क) मान लीजिए कि पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी 300000 किमी. है और यह पृथ्वी के परित: एक परिभ्रमण 28 दिन में करता है। तुल्यकारी उपग्रह वे उपग्रह होते हैं जो पृथ्वी के सापेक्ष विश्राम में रहते हैं। इन दोनों कथनों का और कैप्लर के तृतीय नियम का प्रयोग करके, पृथ्वी के केन्द्र से तुल्याकारी उपग्रह की ऊँचाई व्युत्पन्न कीजिए। 5

(ख) प्वॉयसां निवेश और चरघातांकीय सेवाकाल वाली एकल सेवाकर्ता पंक्ति प्रणाली लीजिए। मान लीजिए कि माध्य आगमन दर 3 कॉल यूनिट प्रति घंटा है। प्रत्याशित सेवाकाल 0.25 घंटे है और प्रणाली में अधिकतम अनुमत काल यूनिट दो हैं, तब ज्ञात कीजिए : 5

(i) प्रणाली के निष्क्रिय होने की प्रायिकता

(ii) प्रणाली में काल यूनिटों की प्रत्याशित संख्या

6. (क) लम्बाई l के एक धागे को एक सिरे से नियत बिन्दु से और दूसरे सिरे पर द्रव्यमान m की छड़ी से जोड़ा जाता है। छड़ी एकसमान वेग V पर वृत्ताकार घूम रही है। धागे में बल ज्ञात करने के लिए विमीय विश्लेषण का प्रयोग कीजिए। 4

(ख) प्रतिभूतियों 1 और 2 का प्रतिफल बंटन नीचे दिया गया है : 6

घटना (j)	संयोग $P_{1j} = P_{2j}$	प्रतिफल R_{1j}	प्रतिफल R_{2j}
1	0.33	19	18
2	0.25	17	16
3	0.17	11	11
4	0.25	10	9

ज्ञात कीजिए कि मार्कोविच के अनुसार कौन-सी प्रतिभूति ज्यादा जोखिमपूर्ण है।

7. (क) पश्चमित आपूर्ति से अभिलक्षणित निम्नलिखित बाजार की व्याख्या कीजिए : 3

$$D_t = 30 - 9p_t$$

$$S_t = 3 + 12p_{t-1}$$

(ख) लागत फलन : 3

$$C = 0.7x^3 - 0.8x^2 + 12x + 9$$

के लिए वह निर्गत ज्ञात कीजिए जिससे अधिकतम लाभ प्राप्त हो, जबकि दिया गया है कि x की लागत कीमत ₹ 45 प्रति इकाई है।

(ग) दो निवेश सूचियों की तुलना करने में प्रयुक्त होने वाले ***चार*** कारक बताइए। 2

(घ) वास्तविक जगत् की समस्याओं में गाउसीय पिच्छक निदर्श के अनुप्रयोग में आने वाली ***दो*** सीमाएँ बताइए। 2