

**BACHELOR'S DEGREE
PROGRAMME (BDP)**

Term-End Examination

June, 2020

MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) Attempt five questions in all. Q. No. 7 is compulsory.

(ii) Answer any four questions from Question Nos. 1-6.

(iii) Calculators are not allowed.

1. (a) Check whether or not the following argument is valid : 3

$$p \rightarrow s$$

$$r \rightarrow q$$

$$\underline{r \vee p}$$

$$\therefore s \vee q$$

- (b) Solve the recurrence relation :

$$a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 3^n$$

for $n \geq 2$ with $a_0 = -1$ and $a_1 = 6$. 5

- (c) Prove or disprove : 2

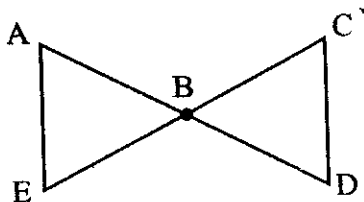
“The complete graph, K_5 , has a Eulerian circuit.”

2. (a) If a seven-digit number is chosen at random, what is the probability that the product of its digits is 18 ? 3

- (b) Prove that : 4

$$S_n^2 = 2^{n-1} - 1, \forall n \geq 2$$

- (c) Draw three non-isomorphic spanning trees of the following graph : 3



3. (a) Let S denote the set of all divisors of 70.

Define :

7

$a \wedge b = \text{l.c.m. of } a \text{ and } b \text{ and}$

$a \vee b = \text{g. c. d of } a \text{ and } b; a, b \in S.$

Check whether or not S is a Boolean algebra w. r. t. operations \vee and \wedge .

- (b) Find the generating function for the sequence $\{a_n\}_{n \geq 0}$, where $a_n = 4n - 3$. 3

4. (a) Convert the following Boolean expression into DNF : 3

$$(x \wedge y') \vee (x' \wedge z')$$

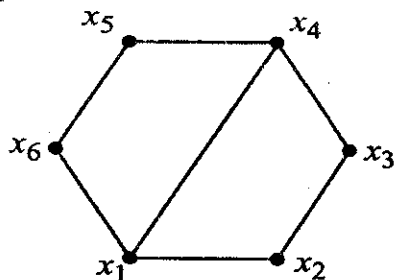
- (b) Find the number of integer solutions of the equation $x + y + z = 20$ with $0 < x \leq 7$, $0 < y \leq 8$ and $z > 0$. 5

- (c) Prove or disprove : 2

"A graph G with $X(G) \geq 3$ contains an odd cycle."

5. (a) Show that $10^n - 3^n$ is divisible by 7 for all $n \in \mathbb{N}$, by using the principle of Mathematical induction. 3

- (b) (i) Draw the complement of the following graph : 2



- (ii) Is this complement a planar graph ?

Justify your answer. 2

- (c) Find the coefficient of x^8 in the expansion of $(1 - 2x^2 + x^3)$. 3

6. (a) Solve the recurrence relation

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)\{(n-1)!\} \quad (n \geq 1) \quad \text{by}$$

the method of telescoping sums, where

$$a_0 = 1. \quad \text{Also find } a_4. \quad \text{4}$$

- (b) Find the edge chromatic number of the graph in Q. 2 (c) above. 2

- (c) If 5 points are chosen in a square of side n cm, show that there will always be two points at a distance of at the most $n / \sqrt{2}$ cm. 2
- (d) Give an examples, with justification, of a tautology. 2
7. Which of the following statements are True and which are False ? Justify your answers in the form of a short proof or a counter example : 10
- (i) $K_{3, 4}$ is not a Hamiltonian graph.
- (ii) The natural number 10 has a self-conjugate partition.
- (iii) The contrapositive of the statement, 'If Bano drinks green tea only, then Amit goes to school' is 'If Bano does not drink green tea, then Amit goes to school'.
- (iv) The generating function of the sequence $\{1, 2, 3, \dots\}$ is $(1 - z)^{-2}$.
- (v) Any two 3-regular graphs are isomorphic.

MTE-13

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2020

एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) कुल पाँच प्रश्न कीजिए। प्रश्न सं. 7 करना अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैल्कुलेटरों की अनुमति नहीं है।

1. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित तर्क मान्य है या नहीं : 3

$$p \rightarrow s$$

$$r \rightarrow q$$

$$\underline{r \vee p}$$

$$\therefore s \vee q$$

(ख) पुनरावृत्ति संबंध :

$$a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 3^n, n \geq 2$$

जहाँ $a_0 = -1$ और $a_1 = 6$ को हल कीजिए। 5

(ग) सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 2

“पूर्ण ग्राफ K_5 में एक ऑयलरीय परिपथ है।”

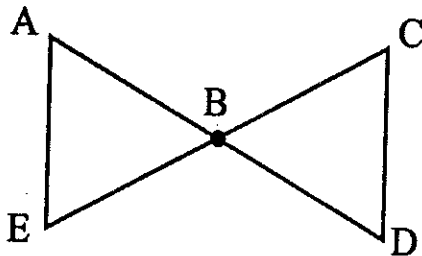
2. (क) यदि कोई 7-अंक की संख्या यादृच्छ्या चुनी जाती है, तो इसके अंकों का गुणनफल 18 होने की क्या प्रायिकता है ? 3

(ख) सिद्ध कीजिए कि : 4

$$S_n^2 = 2^{n-1} - 1, \forall n \geq 2$$

(ग) निम्नलिखित ग्राफ के तीन अतुल्यकारी वृक्ष

बनाइए : 3



3. (क) मान लीजिए कि $S, 70$ के सभी भाजकों का समुच्चय है। परिभाषित कीजिए : 7

$a \wedge b = a$ और b का लघुतम समापवर्तक

$a \vee b = a$ और b का महत्तम समापवर्त्य,
जहाँ $a, b \in S$ ।

जाँच कीजिए S संक्रियाओं \vee और \wedge के सापेक्ष एक बूलीय बीजावली है या नहीं।

- (ख) अनुक्रम $\{a_n\}_{n \geq 0}$, जहाँ $a_n = 4n - 3$, के लिए जनक फलन ज्ञात कीजिए। 3

4. (क) निम्नलिखित बूलीय व्यंजक को DNF (वियोजनीय प्रसामान्य समघात) में रूपांतरित कीजिए : 3

$$(x \wedge y') \vee (x' \wedge z')$$

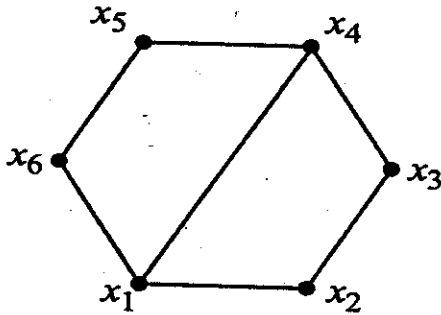
- (ख) समीकरण $x + y + z = 20$, जहाँ $0 < x \leq 7$, $0 < y \leq 8$ और $z > 0$, के पूर्णांक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए। 5

(ग) सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 2

“एक ग्राफ G , जबकि $X(G) \geq 3$, में एक विषम चक्र होता है।”

5. (क) गणितीय आगमन के सिद्धान्त का प्रयोग करके यह सिद्ध कीजिए कि $10^n - 3^n$ सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए 7 से विभाज्य है। 3

(ख) (i) निम्नलिखित ग्राफ का पूरक बनाइए : 2



(ii) क्या यह पूरक एक समतलीय ग्राफ है ?

अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2

(ग) $(1 - 2x^2 + x^3)$ के प्रसार में x^8 का गुणांक ज्ञात

कीजिए। 3

6. (क) पुनरावृत्ति संबंध : 4

$$a_n = a_{n-1} + (n-1) \{(n-1)!\} (n \geq 1)$$

जहाँ $a_0 = 1$, को अंतःसर्पी योगफल विधि से

हल कीजिए। साथ ही, a_4 भी ज्ञात कीजिए।

(ख) उपर्युक्त प्रश्न 2 (c) में दिए गए ग्राफ की कोर

वर्णिक संख्या ज्ञात कीजिए। 2

(ग) यदि n सेमी. भुजा के एक वर्ग के अंदर

5 बिन्दु चुने जाते हैं, तो दिखाइए कि हमेशा दो

बिन्दु ऐसे होंगे जिनके बीच की दूरी अधिकतम

$n / \sqrt{2}$ सेमी. होगी। 2

(घ) पुष्टि सहित एक सर्वसत्य कथन का उदाहरण

दीजिए। 2

7. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से

असत्य ? अपने उत्तरों की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या

प्रति-उदाहरण के रूप में दीजिए : 10

(i) $K_{3,4}$ एक हैमिल्टनी ग्राफ नहीं है।

- (ii) प्राकृतिक संख्या 10 का एक स्व-संयुग्मी विभाजन है।
- (iii) कथन 'यदि बानो ग्रीन टी पीती है, तो अमित विद्यालय जाता है।' का प्रतिस्थितक 'यदि बानो ग्रीन टी नहीं पीती है, तो अमित विद्यालय जाता है।' है।
- (iv) अनुक्रम $\{1, 2, 3, \dots\}$ का जनक फलन $(1 - z)^{-2}$ है।
- (v) कोई भी दो 3-नियमित ग्राफ तुल्यकारी होते हैं।