No. of Printed Pages : 16 **MTE-11**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2020

MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No. 7 is compulsory.*

*(ii) Attempt any **four** questions from Question Nos. 1 to 6.*

(iii) Use of calculator is not allowed.

---

1. (a) The data on the profits (in ₹ lakh) earned by 60 companies are as follows : 5

Profits	No. of Companies
Below 10	5
10—20	12
20—30	20
30—40	16
40—50	5
50 & above	2

Obtain the limits of the profits of the central 50 percent companies.

(b) A person gets a construction job. The completion of the job in time depends on whether there is a strike in the company. There are 40% chances that there will be a strike. Probability that the job is completed on time is 30% if the strike takes place and 70%, if it does not take place. What is the probability that the job will be completed in time ? 3

(c) Let X be a random variable with p.d.f. : 2

$$f(x) = \theta e^{-\theta x};\ \theta > 0, x \geq 0$$

Find the moment generating function of X. 2

2. (a) Let X be a random variable having uniform density over [0, 1]. Find : 5

(i) $E(\sqrt{x})$

(ii) p.d.f. of $y = \sqrt{x}$

(iii) $E(y)$

(iv) Check whether $E(y) = E(\sqrt{x})$ or not.

(b) A company is manufacturing two types of bulbs. A random sample of 50 bulbs of

type I and 60 bulbs of type II was taken and the following information was found : 5

	Mean Life (hrs.)	Standard Deviation (hrs.)
Type I	1300	41
Type II	1280	46

Determine the 95% confidence interval for the difference of average life of two types of bulbs assuming that the distributions of average lives of bulbs follow normal distribution. [You may use $Z_{0.025} = 1.96$, $Z_{0.005} = 2.576$, $Z_{0.05} = 1.685$].

3. (a) Four coins were tossed and number of heads were counted. The experiment was repeated 200 times and the following data are obtained : 6

No. of Head	Frequency
0	5
1	32
2	65
3	75
4	23

Test whether the data comes from a binomial distribution at 5% level of significance. [You may use $\chi^2_{3,0.05} = 6.2518$, $\chi^2_{4,0.05} = 7.7107$, $\chi^2_{5,0.05} = 9.145$].

(b) If X is a random variable such that $E(X) = 3$ and $E(X^2) = 13$, use Chebyshev's inequality to determine a lower bound for $P(-2 < X < 8)$. 4

4. (a) For the binomial population with density function :

$$P[X = x] = {}^{n}C_{x}\, p^{x} q^{n-x};$$

$x = 1, 2, ..., n$ and $q = 1 - p$. Obtain the maximum likelihood estimator for p. 4

(b) The joint distribution of two random variables X and Y is given by : 4

$$f(x, y) = 4xye^{-(x^2+y^2)};\ x \geq 0, y \geq 0$$

Check whether X and Y are independent or not.

(c) If X is a Poisson variate such that :

$$P(X = 2) = 9P(X = 4) + 90P(X = 6)$$

then find the mean of X. 2

5. (a) In a partially destroyed records, the results pertaining to an analysis of correlation data were obtained as follows : 5

Variance of X = 9

Regression equations :

$$8X - 10Y + 66 = 0$$

$$40X - 18Y = 214$$

Determine :

(i) the mean values of X and Y.

(ii) the correlation coefficient between X and Y

(iii) the standard deviation of Y.

(b) Suppose there are two bags A and B. A contains n white and 2 black balls and B contains 2 white and n black balls. One of the two bags is selected at random and two balls are drawn from it without replacement. If both the balls drawn are white and the probability that the bag A

was used to draw the ball is $\frac{6}{7}$, find the value of n. 5

6. (a) The first four moments about the value 4 of a distribution of the variable are –1.5, 17, –30 and 108. Find out : 5

    (i) first four moments about mean

    (ii) the skewness and kurtosis

   (b) Let p be the probability that a coin will fall head in a single toss in order to test $H_0 : p = \frac{1}{2}$ against $H_1 : p = \frac{3}{4}$. The coin is tossed 5 times and H_0 is rejected if more than 3 heads are obtained. Find the probability of type I and II errors. Also, determine the power of the test. 5

7. Which of the following statements are true *or* false ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 2 each

   (i) If A and B are independent events, A and $\overline{B}$ will also be independent.

(ii) If 8 persons are seated on 8 chairs at a round table, the probability that two specified persons are sitting next to each other will be $\frac{2}{7}$.

(iii) If $x_1, x_2, ..., x_n$ be a random sample from a normal population with mean 0 and variance σ^2, then $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ is an unbiased estimator of σ^2.

(iv) Mean of any distribution always lies between median and mode.

(v) If X has F-distribution with (n_1, n_2) degrees of freedom, then $\frac{1}{X}$ also has F-distribution with (n_1, n_2) degrees of freedom.

MTE-11

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2020

एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i)* प्र. सं. 7 **अनिवार्य** है।

(ii) प्रश्न संख्या 1 से 6 तक में से कोई ***चार*** प्रश्न कीजिए।

(iii) कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) 60 कम्पनियों द्वारा कमाये गये लाभ के आँकड़े (₹ लाख में) निम्नलिखित हैं : 5

लाभ	कम्पनियों की संख्या
10 से कम	5
10—20	12
20—30	20
30—40	16
40—50	5
50 से अधिक	2

50 प्रतिशत बीच की कम्पनियों के लाभ की सीमाएँ प्राप्त कीजिए।

(ख) एक व्यक्ति को एक निर्माण कार्य मिलता है। कार्य का समय से पूरा होना इस बात पर निर्भर करता है कि कम्पनी में कोई हड़ताल है या नहीं। हड़ताल होने की संभावना 40% है। वह प्रायिकता, कि कार्य समय से पूरा होता है यदि हड़ताल होती है, 30% है और वह प्रायिकता, कि कार्य समय से पूरा होता है यदि हड़ताल नहीं होती है, 70% है। वह प्रायिकता क्या होगी कि कार्य समय से पूरा होगा ? 3

(ग) मान लीजिए कि X एक :

$$f(x) = \theta e^{-\theta x};\ \theta > 0, x \geq 0$$

p.d.f. वाला एक यादृच्छिक चर है। X का आघूर्ण जनक फलन ज्ञात कीजिए। 2

50 प्रतिशत बीच की कम्पनियों के लाभ की सीमाएँ प्राप्त कीजिए।

(ख) एक व्यक्ति को एक निर्माण कार्य मिलता है। कार्य का समय से पूरा होना इस बात पर निर्भर करता है कि कम्पनी में कोई हड़ताल है या नहीं। हड़ताल होने की संभावना 40% है। वह प्रायिकता, कि कार्य समय से पूरा होता है यदि हड़ताल होती है, 30% है और वह प्रायिकता, कि कार्य समय से पूरा होता है यदि हड़ताल नहीं होती है, 70% है। वह प्रायिकता क्या होगी कि कार्य समय, से पूरा होगा ? 3

(ग) मान लीजिए कि X एक :

$$f(x) = \theta e^{-\theta x};\ \theta > 0, x \geq 0$$

p.d.f. वाला एक यादृच्छिक चर है। X का आघूर्ण जनक फलन ज्ञात कीजिए। 2

2. (क) मान लीजिए कि X, [0, 1] पर वितरित एकसमान वितरण वाला एक यादृच्छिक चर है। ज्ञात कीजिए : 5

(i) $E(\sqrt{x})$

(ii) $y = \sqrt{x}$ का p.d.f.

(iii) $E(y)$

(iv) जाँच कीजिए कि $E(y) = E(\sqrt{x})$ है या नहीं।

(ख) एक कम्पनी दो प्रकार के बल्ब बनाती है। प्रकार I के 50 बल्बों का और प्रकार II के 60 बल्बों का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया गया और निम्नलिखित सूचना प्राप्त की गयी : 5

	माध्य जीवनकाल (घंटों में)	मानक विचलन (घंटों में)
प्रकार I	1300	41
प्रकार II	1280	46

यह मानकर कि बल्बों के माध्य जीवनकाल का वितरण प्रसामान्य बंटन है, दोनों प्रकार के बल्बों के माध्य जीवनकाल के अंतर के लिए 95%

विश्वस्यता अंतराल ज्ञात कीजिए। [आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं : $Z_{0.025} = 1.96$, $Z_{0.005} = 2.576$, $Z_{0.05} = 1.685$]।

3. (क) चार सिक्के उछाले गए और चितों की संख्या गिनी गयी। यह प्रयोग 200 बार दोहराया गया और निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त किए गए :

चित्तों की संख्या	बारंबारता
0	5
1	32
2	65
3	75
4	23

5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए कि ये आँकड़े द्विपद बंटन से लिए गए हैं। [आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं : $\chi^2_{3,0.05} = 6.2518$, $\chi^2_{4,0.05} = 7.7107$, $\chi^2_{5,0.05} = 9.145$]। 2

(ख) यदि X एक यादृच्छिक चर इस प्रकार है कि $E(X) = 3$ और $E(X^2) = 13$ है, तो शेबीशेब असमिका का प्रयोग करके $P(-2 < X < 8)$ का निम्न परिबद्ध ज्ञात कीजिए। 4

4. (क) घनत्व फलन :

$$P[X = x] = {}^{n}C_{x}\, p^{x} q^{nx-x}$$

$x = 1, 2, \ldots, n$ और $q = 1 - p$ वाली द्विपद समष्टि के लिए p का अधिकतम संभावित आकलक प्राप्त कीजिए। 4

(ख) दो यादृच्छिक चर X और Y का संयुक्त घनत्व फलन निम्नलिखित है : 4

$$f(x, y) = 4xye^{-(x^2+y^2)};\ x \geq 0, y \geq 0$$

जाँच कीजिए कि X और Y स्वतंत्र हैं या नहीं।

(ग) यदि X एक प्वॉयसां चर इस प्रकार है कि :

$$P(X = 2) = 9P(X = 4) + 90P(X = 6)$$

है, तो X का माध्य ज्ञात कीजिए। 2

5. (क) एक आंशिक नष्ट रिकॉर्ड से, सहसम्बन्धित आँकड़ों के विश्लेषण से सम्बन्धित निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किये गये : 5

X का प्रसरण = 9

समाश्रयण समीकरण :

$$8X - 10Y + 66 = 0$$

$$40X - 18Y = 214$$

ज्ञात कीजिए :

(i) X और Y के माध्य मान

(ii) X और Y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक

(iii) Y का मानक विचलन

(ख) मान लीजिए दो थैले A और B हैं। थैले A में n सफेद और 2 काली गेंदें हैं और थैले B में 2 सफेद और n काली गेंदें हैं। एक थैला यादृच्छिक चुना गया और उसमें से बिना प्रतिस्थापन के

2 गेंदें निकाली गयीं। यदि निकाली गयी दोनों गेंदें सफेद हैं और वह प्रायिकता, कि थैला A गेंदें निकालने के लिए प्रयोग किया गया, $\frac{6}{7}$ है, तो n का मान ज्ञात कीजिए। 5

6. (क) एक चर के एक बंटन के मान 4 के सापेक्ष पहले चार आघूर्ण –1.5, 17, – 30 और 108 हैं। ज्ञात कीजिए : 5

(i) माध्य के सापेक्ष पहले चार आघूर्ण

(ii) वैषम्यता और ककुदता

(ख) मान लीजिए कि p वह प्रायिकता है कि एक सिक्के को उछालने पर पहली ही बार में चित आयेगा जो कि $H_0 : p = \frac{1}{2}$ विरुद्ध $H_1 : p = \frac{3}{4}$ के परीक्षण के लिए है। एक सिक्का 5 बार उछाला जाता है और H_0

अस्वीकार की जाती है यदि 3 से अधिक बार चित प्राप्त होता है। प्रकार I और प्रकार II त्रुटि की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। परीक्षण की क्षमता भी ज्ञात कीजिए। 5

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति उदाहरण दीजिए : प्रत्येक 2

(i) यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो A और $\overline{B}$ भी स्वतंत्र होंगी।

(ii) यदि 8 व्यक्ति एक गोल मेज पर 8 कुर्सियों पर बैठे हैं, तो वह प्रायिकता कि दो विशेष व्यक्ति एक-दूसरे के साथ बैठे हैं, $\frac{2}{7}$ होगी।

(iii) यदि $x_1, x_2, ..., x_n$ माध्य 0 और प्रसरण σ^2 वाली प्रसामान्य समष्टि से लिया गया एक

यादृच्छिक प्रतिदर्श है, तो $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \sigma^2$ का एक अनभिनत आकलक है।

(iv) किसी बंटन का माध्य हमेशा माध्यिका और बहुलक के बीच स्थित होता है।

(v) यदि X, (n_1, n_2) स्वातंत्र्य कोटि वाले F-बंटन में है, तो $\frac{1}{X}$ भी (n_1, n_2) स्वातंत्र्य कोटि वाले F-बंटन में होगा।