No. of Printed Pages : 10 **MTE-10**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 Hours] *[Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : Answer any five questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is not allowed. Symbols have their usual meanings.

---

1. (a) Estimate the eigenvalues of the following matrix using Gerschgorin bounds:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Draw a rough sketch of the bounds. 5

(b) Set up the Gauss-Seidel iteration scheme in matrix form for solving the system of linear equations:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Decide whether the method converges or not. 5

2. (a) Using the classical fourth order Runge-Kutta method, find the approximate value of y (0.2) for the initial value problems:

$$y' = x + \frac{1}{y}, \; y(0) = 1$$

with step size $h = 0.1$. 6

(b) In the following approximation of sin$x$ find the smallest value of n that gives an error less than or equal to 10^{-3}. 2

$$\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

where $-1 \le x \le 1$.

(c) Check whether or not the fixed point, iteration scheme $x_{n+1} = \frac{-(2x_n + 1)}{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots\dots$ converges to the root -1 of the equation $x^2 + 2x + 1 = 0$. 2

3. (a) From the following data, estimate the number of students having weight between 60 and 70 kg.: 5

Weight (in kg.)	0–40	40–60	60–80	80–100	100–120
No. of students	250	120	100	70	30

(b) Determine the constants α, β and γ in the differentiation formula:

$$y''(x_0) = \alpha y(x_0) + \beta y(x_0 + h) + \gamma y(x_0 + 2h)$$

so that the method is of highest possible order. Also find the error term and the order of the method. 5

4. (a) Solve the following system by the method of LU decomposition: 5

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 18$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$$

Assume $U_{ii} = 1$, $i = 1, 2, 3$.

(b) Perform one iteration of the Birge-Vieta method to find a root of the equation:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 + 1 = 0$$

Take the initial approximation $p_0 = -1.1$. 3

(c) Solve:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}, \text{ with } y(0) = 1$$

using Euler's method in the interval [0, 0.04] using $h = 0.02$. 2

5. (a) Determine a unique polynomial $f(x)$ of degree ≤ 3 such that $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = -1$, $f(x_1) = 2$, $f'(x_1) = 0$, where $x_1 - x_0 = h$. 4

(b) Find an interval of unit length which contains the smallest positive root of the equation $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Taking the end points of this interval as the initial approximations, perform two iterations of the secant method. 3

(c) Prove that $\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}$, where δ is the central difference operator and μ is the mean operator. 3

6. (a) Evaluate the integral $I = \int_0^1 \frac{dx}{2+3x}$ using trapezoidal rule with 2 and 3 sub-intervals. 3

(b) Using Gauss-Jordan method, find the inverse of the matrix: 5

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Starting with $x_0 = 1$, do two iterations of Newton-Raphson method to find an approximate root of the equation $x^5 - 2 = 0$. 2

7. (a) Using Newton's divided difference interpolation formula, estimate $f(3)$ from the following data: 5

x	1	2	4	6	8
$f(x)$	2	6	10	11	15

(b) Perform 3 iterations of the power method to estimate the highest eigenvalue (in magnitude) of the matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Use $v^{(0)} = [1.2,\ 1.15,\ 1.15]^T$ as the initial approximation to the eigenvector. 5

—x—

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

कुल का 70%

नोट: किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये। सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक किए जा सकते हैं। कैलकुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

---

1. (a) गर्शगोरिन परिबंधों से निम्नलिखित आव्यूह के आइगेनमान आकलित कीजिये:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

परिबंधों का रेखांकन मोटे तौर पर कीजिये। 5

(b) रैखिक समीकरण निकाय

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

को हल करने के लिए आव्यूह रूप में गाउस-सीडल पुनरावृत्ति विधि स्थापित कीजिये। निर्धारित कीजिये कि विधि अभिसारित होती है या नहीं। 5

2. (a) चिरप्रतिष्ठित चतुर्थ कोटि रुंगे-कुट्टा विधि को प्रयोग करके, आदि मान समस्याः

$$y' = x + \frac{1}{y},\ y(0) = 1$$

के लिए सोपान लम्बाई $h = 0.1$ लेकर $y(0.2)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिये। 6

(b) $\sin x$ के निम्नलिखित सन्निकटन में n का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिये जो त्रुटि 10^{-3} या इससे कम देता है:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

जहाँ $-1 \le x \le 1$. 2

(c) जाँच कीजिए कि नियत बिंदु पुनरावृत्ति विधि

$$x_{n+1} = \frac{-(2x_n + 1)}{x_n},\ n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

समीकरण $x^2 + 2x + 1 = 0$ के मूल -1 पर अभिसरित होती है या नहीं। 2

3. (a) निम्नलिखित आंकड़ों से वजन 60 और 70 kg. के बीच वाले छात्रों की संख्या आकलित कीजिये: 5

वजन (किग्रा में)	0–40	40–60	60–80	80–100	100–120
छात्रों की संख्या	250	120	100	70	30

(b) अवकलन सूत्र:

$y''(x_0) = \alpha y(x_0) + \beta y(x_0 + h) + \gamma y(x_0 + 2h)$

में अचरों α, β और γ के मान इस प्रकार निर्धारित कीजिये कि यह विधि उच्चतम संभव कोटि की हो। त्रुटि पद भी ज्ञात कीजिये और विधि की कोटि भी ज्ञात कीजिये। 5

4. (a) LU वियोजन विधि से निम्नलिखित निकाय को हल कीजिये: 5

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 18$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$

मान लीजिए कि $U_{ii} = 1, i = 1, 2, 3.$

(b) समीकरण:

$P(x) = 2x^3 + x^2 + 1 = 0$

का एक मूल ज्ञात करने के लिए बर्ज-विएटा विधि की एक पुनरावृत्ति कीजिए। प्रारम्भिक सन्निकट $p_0 = -1.1$ लीजिए। 3

(c) $h = 0.02$ लेकर, ऑयलर विधि सें अंतराल [0, 0.04] में, $y(0) = 1$ के लिए, $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ को हल कीजिये।

2

5. (a) घात 3 या कम वाला एक अद्वितीय बहुपद $f(x)$ इस पकार ज्ञात कीजिये कि $f(x_0) = 1, f'(x_0) = -1, f(x_1) = 2, f'(x_1) = 0$, जहाँ $x_1 - x_0 = h$. 4

(b) एकक लम्बाई वाला एक ऐसा अंतराल ज्ञात कीजिये जिसमें समीकरण $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ का सबसे छोटा धन मूल हो। इस अंतराल के अंतिम बिन्दुओं को प्रारम्भिक सन्निकटन मानकर छेदिका विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिये। 3

(c) सिद्ध कीजिये कि $\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}$, जहाँ δ केन्द्रीय अंतर संकारक है और μ माध्य संकारक है। 3

6. (a) 2 और 3 उप-अंतराल लेकर, समलंबी नियम द्वारा समाकल $I = \int_0^1 \frac{dx}{2+3x}$ का मूल्यांकन कीजिये। 3

(b) गाउस-जॉर्डन विधि से आव्यूहः 5

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिये।

(c) समीकरण $x^5 - 2 = 0$ का एक सन्निकट मूल ज्ञात करने के लिए, $x_0 = 1$ से प्रारम्भ करके न्यूटन-रेफ्सन विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिये। 2

7. (a) न्यूटन के विभाजित अंतर अंतर्वेशन सूत्र का प्रयोग करके, निम्नलिखित आंकड़ों से $f(3)$ आकलित कीजिये: 5

x	1	2	4	6	8
$f(x)$	2	6	10	11	15

(b) आव्यूह:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

का अधिकतम आइगेनमान (परिमाण में) आकलित करने के लिए घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ कीजिये। आइगेन सदिश के लिए $v^{(0)} = [1.2, 1.15, 1.15]^T$ को प्रारम्भिक सन्निकटन के रूप में लीजिए। 5

—x—