No. of Printed Pages : 12

MTE-09

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2020

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt five questions in all. Q. No. 1 is compulsory. Do any four questions from question nos. 2 to 7.*

---

1. Are the following statements true or false ? Give proper reasons for your answer : 2 each

   (a) The set Q of rational numbers is a closed subset of R.

   (b) The limit :

   $$\lim_{x \to 0+} (x \operatorname{cosec} x)^x$$

   does not exist.

(c) The function :

$$f : [-1, 3] \to \mathbf{R}$$

defined by :

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 + 4}$$

is uniformly continuous on [– 1, 3].

(d) The series :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \ldots\ldots$$

is a convergent series.

(e) An integrable function can have finitely many points of discontinuities.

2. (a) Write the inequality, $\frac{3}{2} < x + 1 < \frac{7}{2}$ in the modulus form. 2

(b) Show that the sequence (a_n), where $a_n = \frac{n}{n^2 + 4}$ is monotonic. Is (a_n) a Cauchy sequence ? Justify your answer. 4

(c) Let : 4

$$f : [0,1] \to \mathbf{R}$$

be a function defined by :

$$f(x) = 1 - x^2.$$

Let :

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

and $$P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

be two partitions of the interval [0, 1]. Calculate $L(P_2, f)$ and $U(P_1, f)$.

3. (a) Prove or disprove the following statement : 2

'Every strictly increasing onto function is invertible.'

(b) Examine the continuity of the function : 4

$$f : [1,3] \to \mathbf{R}$$

defined by :

$$f(x) = \frac{[x]}{3x - 1}$$

where $[x]$ denotes the greatest integer function.

(c) Prove that : 4

$$x < \log\left(\frac{1}{1-x}\right) < \frac{x}{1-x},\ 0 < x < 1$$

4. (a) Check whether the intervals [2, 5] and [7, 10] are equivalent or not. 3

(b) Show that the function f defined by : 3

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

has a real root in the interval [0, 2].

(c) State Bonnet's mean value theorem for integrals. Apply it to show that : 4

$$\left|\int_3^5 \frac{\cos x}{x}\, dx\right| \leq \frac{2}{3}$$

5. (a) Use the definition of convergence of a sequence, to prove that the sequence (a_n), where $a_n = \dfrac{4^2}{n^2 + 5^2}$, converges to zero. 3

(b) Prove that the complement of every closed set is open. 3

(c) Using the sequential definition of the continuity, prove that the function f, defined by : 4

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{if } x \text{ is irrational} \\ -3, & \text{if } x \text{ is rational} \end{cases}$$

is discontinuous at each real number.

6. (a) Give an example of a series Σa_n such that Σa_n is not convergent but the sequence (a_n) converges to 0. 2

(b) Show that on the curve, $y = 3x^2 - 7x + 6$, the chord joining the points whose abscissae are $x = 1$ and $x = 2$, is parallel to the tangent at the point whose abscissa is $x = \frac{3}{2}$. 4

(c) Evaluate : 4

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+3)^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+6)^3}} + \ldots\ldots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(7n-3)^3}}\right]$$

7. (a) Check, whether the collection G, given by : 3

$$G' = \left\{ \left] \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right[: n \in N \right\}$$

is an open cover of]0, 1[.

(b) Test the series : 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$$

for absolute and conditional convergence.

(c) Check whether the function f given by : 4

$$f(x) = (x-4)^3(x+1)^2$$

has local maxima and local minima.

MTE-09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2020

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : कुल ***पाँच*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्र. सं. 1 अनिवार्य है। प्र. सं. 2 से 7 तक किन्हीं ***चार*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर के उचित कारण दीजिए : प्रत्येक 2

   (क) परिमेय संख्याओं का समुच्चय **Q**, **R** का संवृत उपसमुच्चय है।

   (ख) सीमा :

   $$\lim_{x \to 0+} (x \operatorname{cosec} x)^x$$

   का अस्तित्व नहीं होता।

(ग) $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+4}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : [-1, 3] \to \mathbf{R}$, $[-1, 3]$ पर एकसमानतः संतत है।

(घ) श्रेणी :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \ldots\ldots$$

एक अभिसारी श्रेणी है।

(ङ) एक समाकलनीय फलन के लिए परिमित रूप से कई असांतत्य बिन्दु हो सकते हैं।

2. (क) मापांक रूप में असमिका $\frac{3}{2} < x + 1 < \frac{7}{2}$ लिखिए। 2

(ख) दिखाइए कि अनुक्रम (a_n) एकदिष्ट है, जहाँ $a_n = \frac{n}{n^2+4}$। क्या (a_n) कॉशी अनुक्रम है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ग) मान लीजिए : 4

$$f : [0,1] \to \mathbf{R}$$

$$f(x) = 1 - x^2$$

द्वारा परिभाषित फलन है। मान लीजिए :

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

और $$P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

अन्तराल [0, 1] के दो विभाजन हैं। $L(P_2, f)$ और $U(P_1, f)$ परिकलित कीजिए।

3. (क) निम्नलिखित कथनों को सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 2

'प्रत्येक निरंतर वर्धमान आच्छादी फलन व्युत्क्रमणीय है।'

(ख) $f(x) = \dfrac{[x]}{3x-1}$ द्वारा परिभाषित फलन : 4

$$f : [1,3] \to \mathbf{R}$$

के सांतत्य की जाँच कीजिए, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है।

(ग) सिद्ध कीजिए कि : 4

$$x < \log\left(\frac{1}{1-x}\right) < \frac{x}{1-x},\ 0 < x < 1$$

4. (क) जाँच कीजिए कि अन्तराल [2, 5] और [7, 10] तुल्य हैं या नहीं। 3

(ख) दिखाइए कि : 3

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

द्वारा परिभाषित फलन f का अन्तराल [0, 2] में वास्तविक मूल होता है।

(ग) समाकलों के लिए बोनट के माध्य मान प्रमेय का कथन दीजिए। 4

$$\left| \int_3^5 \frac{\cos x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{3}$$

दिखाने के लिए इसे लागू कीजिए।

5. (क) अभिसरण की परिभाषा का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम (a_n) शून्य तक अभिसरण करता है, जहाँ : 3

$$a_n = \frac{4^2}{n^2 + 5^2},$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संवृत समुच्चय का पूरक विवृत होता है। 3

(ग) फलन के सांतत्य की अनुक्रमिक परिभाषा का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि 4

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \\ -3, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f, प्रत्येक वास्तविक संख्या पर असंतत है।

6. (क) ऐसी श्रेणी Σa_n का उदाहरण दीजिए जिसके लिए Σa_n अभिसारी नहीं है लेकिन अनुक्रम (a_n) 0 की ओर अभिसरण करता है। 2

(ख) दिखाइए कि वक्र :

$$y = 3x^2 - 7x + 6,$$

पर बिन्दुओं को, जिनकी भुज $x = 1$ और $x = 2$ हैं, मिलाने वाली जीवा उस बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा के समान्तर होती है जिसकी भुजा $x = \frac{3}{2}$। 4

(ग) $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+3)^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+6)^3}} + \ldots\ldots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(7n-3)^3}}\right]$$

का मूल्यांकन कीजिए। 4

7. (क) जाँच कीजिए कि : 3

$$G' = \left\{]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}[: n \in \mathrm{N} \right\}$$

द्वारा दिया गया संग्रह G,]0, 1[का विवृत आवरक है या नहीं।

(ख) निरपेक्ष और सप्रतिबंध अभिसरण के लिए श्रेणी

3

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$$

की जाँच कीजिए।

(ग) जाँच कीजिए :

$$f(x) = (x-4)^3 (x+1)^2$$

द्वारा दिए गए फलन f का स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ होता है या नहीं। 4