

No. of Printed Pages : 12

MTE-08

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2020

**MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS
(MATHEMATICS)**

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) Question No. 1 is compulsory.

(ii) Answer any four questions form the remaining Question No. 2 to 7.

(iii) Use of calculators is not allowed.

1. State whether the following statements are True or False. Justify your answer with the help of a short proof or a counter example : 10

(i) For the IVP, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ the

continuity of $f(x, y)$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ guarantees

the unique solution of the problem.

P. T. O.

(ii) The differential equation :

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1 - y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

is hyperbolic if $(x^2 + y^2) > 1$.

(iii) The integrating factor for the differential equation :

$$y dx - x dy + \ln x dx = 0$$

is $\frac{1}{x^3}$.

(iv) $(a - z) d(xy) + xy dz = 0$ is the Pfaffian differential equation corresponding to the family of surfaces $xy = c(a - z)$.

(v) The differential equations $xp = yq$ and $z(xp + yq) = 2xy$ are not compatible.

2. (a) Find the solution of the differential equation :

$$(ax + hy + g) dx + (hx + by + f) dy = 0$$

- (b) Use the method of undertermined coefficients to find the general solution of the differential equation : 4

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 3e^x + 4x^2$$

- (c) Solve the differential equation : 3

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{2x} y = \frac{2x}{y}$$

3. (a) Use the method of variation of parameters to solve the differential equation : 4

$$y''' + 3y' + 2y = 4e^x$$

- (b) Find the integral curves of the differential equations : 4

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

- (c) Find a particular integral of differential equation : 2

$$(D^3 - D'^3)z = x^3 y^3$$

4. (a) Find the complete integral of the differential equation : 4

$$xp + 3yq = 2(z - x^2q^2)$$

- (b) Solve the differential equation : 3

$$(x^2D^2 + 2xy DD' + y^2D'^2)z = x^m y^n$$

- (c) Find a particular integral of the following differential equation : 3

$$(D^2 - 2D + 1)y = xe^x \sin x$$

5. (a) Find the solution of one-dimensional wave equation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

satisfying the boundary conditions :

$$z(0, t) = 0 = z(\alpha, t)$$

where α is a constant. 6

- (b) Solve : 4

$$(D - 1)^2 (D^2 + 1)^2 y = \sin^2 \frac{x}{2} + e^x$$

6. (a) Verify that the differential equation :

$$(2xz - yz) dx + (2yz - xz) dy$$

$$- (x^2 - xy + y^2) dz = 0$$

is integrable. Find its integral using the method of solving Pfaffian differential equations. 4

- (b) Solve the differential equation : 3

$$(3D^2 - 2D + D - 1)z = 4e^{x+y} \cos(x + y)$$

- (c) Solve the differential equation : 3

$$(7y - 3x + 3) dy + (3y - 7x + 7) dx = 0$$

7. (a) A family of fish living off the eastern coast obeys the Malthusian law of growth

$$\frac{dp(t)}{dt} = 0.003p(t). \text{ At } t = 0, \text{ a group of}$$

sharks begins attacking the fishes and rate of killing by sharks is $0.001 p^2(t)$. The fishes also leave the water at the rate

0.002 fishes per minute. Formulate the governing differential equation and find $p(t)$ assuming that at $t = 0$ there are 10 lakh fishes. 5

(b) Find the integral surface of the equation :

$$(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$$

passing through the line $x = 1, y = 0$. 5

MTE-08

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2020

एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

(गणित)

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न सं. 2 से 7 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य।
संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : 10

(i) आदि मान समस्या, $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$

के लिए $f(x, y)$ और $\frac{\partial f}{\partial x}$ की संतता समस्या

का अद्वितीय हल सुनिश्चित करती है।

(ii) यदि $(x^2 + y^2) > 1$ हो, तो अवकल समीकरण

$$\begin{aligned} (1 - x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1 - y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ + x \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0 \end{aligned}$$

अतिपरवलयिक होगा।

(iii) $\frac{1}{x^3}$ अवकल समीकरण

$$y dx - x dy + \ln x dx = 0$$

का समाकलन गुणक है।

(iv) पृष्ठ कुल $xy = c(a - z)$ के संगत

$$(a - z) d(xy) + xy dz = 0$$

फैफियन अवकल समीकरण है।

(v) अवकल समीकरण $xp = yq$ और

$$z(xp + yq) = 2xy \text{ सुसंगत नहीं हैं।}$$

2. (क) अवकल समीकरण :

3

$$(ax + hy + g) dx + (hx + by + f) dy = 0$$

का हल प्राप्त कीजिए।

(ख) अनिर्धारित गुणांक विधि द्वारा अवकल समीकरण :

4

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = 3e^x + 4x^2$$

का व्यापक हल प्राप्त कीजिए।

(ग) अवकल समीकरण :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{2x}y = \frac{2x}{y}$$

का हल प्राप्त कीजिए।

3

3. (क) प्राचल-विचरण विधि द्वारा अवकल समीकरण :

$$y''' + 3y' + 2y = 4e^x$$

का हल प्राप्त कीजिए।

4

(ख) अवकल समीकरण :

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए।

4

(ग) अवकल समीकरण :

$$(D^3 - D'^3)z = x^3y^3$$

का विशेष हल प्राप्त कीजिए।

2

4. (क) अवकल समीकरण :

$$xp + 3yq = 2(z - x^2q^2)$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए। 4

(ख) अवकल समीकरण :

$$(x^2D^2 + 2xyDD' + y^2D'^2)z = x^m y^n$$

का हल प्राप्त कीजिए। 3

(ग) अवकल समीकरण :

$$(D^2 - 2D + 1)y = xe^x \sin x$$

का विशेष हल ज्ञात कीजिए। 3

5. (क) परिसीमा प्रतिबंधों $z(0, t) = 0 = z(a, t)$, जहाँ a एक अचर है, को संतुष्ट करने वाले एकविमीय तरंग समीकरण

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

का हल ज्ञात कीजिए। 6

(ख) हल कीजिए : 4

$$(D - 1)^2 (D^2 + 1)^2 y = \sin^2 \frac{x}{2} + e^x$$

6. (क) जाँच कीजिए कि अवकल समीकरण :

$$(2xz - yz) dx + (2yz - xz) dy - (x^2 - xy + y^2) dz = 0$$

समाकलनीय है। फैफियन अवकल समीकरण का हल प्राप्त करने की विधि द्वारा इसका समाकल प्राप्त कीजिए।

4

(ख) अवकल समीकरण :

$$(3D^2 - 2D^2 + D - 1)z = 4e^{x+y} \cos(x + y)$$

का हल ज्ञात कीजिए।

3

(ग) अवकल समीकरण

$$(7y - 3x + 3) dy + (3y - 7x + 7) dx = 0$$

का हल ज्ञात कीजिए।

3

7. (क) पूर्वी तट पर रहने वाली मछलियों का एक वर्ग

माल्थस के वृद्धि नियम $\frac{dp(t)}{dt} = 0.003p(t)$

का पालन करता है। समय $t = 0$ पर शाकों का

एक समूह मछलियों पर हमला कर देता है और

$0.001p^2(t)$ की दर से मछलियों को मारता है। इसके अतिरिक्त प्रति मिनट 0.002 मछलियाँ तट को छोड़कर चली जाती हैं। वृद्धि नियम (अवकल समीकरण) का सूत्रण कीजिए और $p(t)$ ज्ञात कीजिए जबकि यह पता हो कि $t = 0$ पर तट पर 10 लाख मछलियाँ हैं।

5

(ख) अवकल समीकरण :

$$(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$$

के रेखा $x = 1, y = 0$ से होकर जाने वाले समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

5