No. of Printed Pages : 15

MTE-07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2020

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No. 1 is compulsory.*

(ii) Attempt any four questions from Question No. 2 to 7.

(iii) Use of calculators is not allowed.

---

1. State whether the following statements are true *or* false. Give reasons for your answers in the form of a short proof or a counter-example :

(a) The function $f \circ g$ exists for the functions f and g defined by : 2

$$f(t) = \sin t, \ t \in \mathbf{R};$$

$$g(x, y) = x^2 + 5xy + y^2, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

(b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$. 2

(c) The function :

$$f : \mathbf{R}^2 \sim \{(x, y) \mid y = 0 \text{ or } y = 5x\} \to \mathbf{R}$$

defined by :

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3xy}{y^2 - 5yx}$$

is a homogeneous function. 2

(d) If f is a real-valued continuous function defined over the rectangle $D = [0, 1] \times [1, 2]$, then : 2

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^2 \left[\int_0^1 f(x, y)\, dx \right] dy$$

(e) The function $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, defined by : 2

$$f(x, y, z) = x^3 + e^{y+z}$$

is differentiable everywhere on $\mathbf{R}^3$.

2. (a) Check the continuity of the function : 4

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

at (0, 0), where f is defined by :

(i) $f(x, y) = e^{2x+y} + \tan x$

(ii) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 3, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(b) Let :

$$D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}.$$

Consider two functions f and g from D to R, defined by :

$$f(x, y) = \ln x - \ln y$$

and $$g(x, y) = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}.$$

Show that the necessary condition for functional dependence of f and g is satisfied. Also find a functional relation between f and g. 4

(c) Calculate : 2

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 4}{5x^4 + 7x^2 + 1}$$

3. (a) Find the domain and range of the function f, defined by : 2

$$f(x, y, z) = \frac{x}{2y - 3z}; x, y, z \in \mathbf{R}$$

(b) Find two level curves of the function : 3

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

defined by :

$$f(x, y) = 4x^2 + 16y^2 + 8$$

Draw their rough sketches.

(c) Show that the value of the integral : 5

$$\int_C \left[(x^2 + 3y)\, dx + (5x - 3y^2)\, dy \right]$$

where C is the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, is twice the area enclosed by C.

4. (a) Let $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ be a function defined by :

$$f(x, y, z) = |x + 2y + z|$$

Show that f is not differentiable at the point $(1, -1, 1)$. 4

(b) If : 3

$$z = x^3 y + 3xy^4$$

where $x = \sin 2t$

and $y = \cos^2 t$

find $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}$ by using the chain rule.

(c) Find the second Taylor polynomial of : 3

$$f(x, y) = xy + 3y^2 - 2$$

at (1, 2).

5. (a) Find the mass of an object, which is in the form of a sphere of radius $\sqrt{5}$ cm, centered at the origin. The density at any point is given to be the constant 2. 5

(b) Show that the function :

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

given by :

$$f(x, y) = (xy^3 + 1, x^2 + y^2)$$

is not invertible. Further, check whether it is locally invertible at the point (2, 1). 5

6. (a) Find the surface area of the part of the sphere : 5

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

lying above the ellipse :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

(b) Let $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ be a function defined by : 2

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y-1} + \dfrac{1}{z-1}; & x \neq 1, y \neq 1, z \neq 1 \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$$

Calculate f_{xz} (1, 1, 1).

(c) Evaluate : 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$$

7. (a) Apply Young's theorem to justify that :

$$f_{xy}(1, 1) = f_{yx}(1, 1)$$

for the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, defined by : 3

$$f(x, y) = |x + y|.$$

(b) Show that : 2

$$\lim_{x \to \infty} \left(|x| + 1 \right) = \infty$$

(c) Check whether the function : 3

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

defined by :

$$f(x, y) = x + y \sin x$$

has extremum at any point in the domain of f.

(d) Verify Euler's relation for : 2

$$z = \tan \frac{y}{x}, x \neq 0$$

MTE-07

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2020

एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है।*

(ii) प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं **चार** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) कैलकुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। लघु तथ्य अथवा प्रत्युदाहरण द्वारा अपने उत्तरों के कारण बताइए ?

(क) $f(t) = \sin t,\ t \in \mathbf{R};\ g(x, y) = x^2 + 5xy + y^2,$ $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ द्वारा परिभाषित फलनों f और g के लिए फलन $f \circ g$ का अस्तित्व होता है। 2

(ख) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$

(ग) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - 3xy}{y^2 - 5yx}$ द्वारा परिभाषित फलन

$$f : \mathbf{R}^2 \sim \{(x, y) \mid y = 0 \text{ या } y = 5x\} \to \mathbf{R}$$

एक समघात फलन है। 2

(घ) यदि f, आयत $\mathrm{D} = [0, 1] \times [1, 2]$ पर परिभाषित वास्तविक मान संतत फलन है, तब : 2

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^2 \left[\int_0^1 f(x, y)\, dx \right] dy$$

(ङ) $f(x, y, z) = x^3 + e^{y+z}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \mathbf{R}^3$ पर सर्वत्र अवकलनीय है।

2. (क) (0, 0) पर फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ की सांतत्यता की जाँच कीजिए : 4

जहाँ f निम्नलिखित से परिभाषित है :

(i) $f(x, y) = e^{2x+y} + \tan x$

(ii) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0,0) \\ 3, & \text{यदि } (x, y) = (0,0) \end{cases}$

(ख) मान लीजिए : 4

$$\mathrm{D} = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}.$$

$$f(x, y) = \ln x - \ln y$$

और $g(x, y) = \dfrac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

द्वारा परिभाषित D से R तक के दो फलन f और g लीजिए। दिखाइए कि f और g की फलनिक आश्रितता के लिए अनिवार्य प्रतिबन्ध

को संतुष्ट करते हैं। f और g के बीच फलनिक सम्बन्ध भी ज्ञात कीजिए।

(ग) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4}{5x^4+7x^2+1}$ को परिकलित कीजिए। 2

3. (क) $f(x, y, z) = \dfrac{x}{2y-3z}$; $x, y, z \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए। 2

(ख) $f(x, y) = 4x^2 + 16y^2 + 8$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के दो स्तर वक्र ज्ञात कीजिए। उनका स्थूल चित्र बनाइए। 3

(ग) दिखाइए कि समाकल : 5

$$\int_C \left[(x^2+3y)\,dx + (5x-3y^2)\,dy\right]$$

का मान C से परिबद्ध क्षेत्रफल का दुगुना है, जहाँ C दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ है।

4. (क) मान लीजिए : 4

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

$$f(x, y, z) = |x + 2y + z|$$

द्वारा परिभाषित एक फलन है। दिखाइए कि बिन्दु (1, -1, 1) पर f अवकलनीय नहीं है।

(ख) यदि : 3

$$z = x^3 y + 3xy^4$$

जहाँ $x = \sin 2t$

और $y = \cos^2 t$

श्रृंखला नियम द्वारा $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=0}$ ज्ञात कीजिए।

(ग) (1, 2) पर $f(x, y) = xy + 3y^2 - 2$ का द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 3

5. (क) मूल बिन्दु पर केन्द्रित त्रिज्या $\sqrt{5}$ सेमी. के गोले के रूप वाली वस्तु का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए। किसी भी बिन्दु पर दिया गया घनत्व अचर 2 है। 5

(ख) दिखाइए कि : 5

$$f(x, y) = (xy^3 + 1, x^2 + y^2)$$

द्वारा दिया गया फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ व्युत्क्रमणीय नहीं है। इसके आगे जाँच कीजिए कि क्या बिन्दु (2, 1) पर यह स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है।

6. (क) दीर्घवृत्त : 5

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

के ऊपर स्थित गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ के भाग का पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(ख) मान लीजिए $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$: 2

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y-1} + \dfrac{1}{z-1}; x \neq 1, y \neq 1, z \neq 1 \\ 0; \quad \text{अन्यथा} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन है। f_{xz} (1, 1, 1) परिकलित कीजिए।

(ग) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$ का मूल्यांकन कीजिए। 3

7. (क) यंग प्रमेय द्वारा पुष्टि कीजिए कि

$$f(x, y) = |x + y|$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के लिए

$f_{xy}(1, 1) = f_{yx}(1, 1)$। 3

(ख) दिखाइए कि : 2

$$\lim_{x \to \infty} \left(|x| + 1\right) = \infty$$

(ग) जाँच कीजिए कि क्या $f(x, y) = x + y \sin x$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ का f के प्रांत में किसी बिन्दु पर चरममान होता है। 3

(घ) $z = \tan \frac{y}{x}, x \neq 0$ के लिए ऑयलर सम्बन्ध को सत्यापित कीजिए। 2

3860