of Printed Pages : 12 **MTE-06**

ACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2020

TE-06 : ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS : ABSTRACT ALGEBRA

ne : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

---

te : (i) *Question No. 5 is compulsory.*

(ii) *Answer any four questions from the rest of the questions.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

(a) Check whether or not $\mathbf{Z}$ is a group with respect to the operation $*$, defined by : 3

$$a * b = a + b + 1$$

(b) Show that there is no non-zero ring homomorphism : 3

$$f : \mathbf{Z}_5 \to \mathbf{Z}_7$$

(c) Find a maximal ideal of $\mathbf{R}[x]$ containing the ideal $\left\langle x^2 - 1, x^3 - 1 \right\rangle$. 4

2. (a) Let :

$$S = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid (q, 7) = 1 \right\}$$

Define a relation ~ on S by $\frac{p}{q} \sim \frac{a}{b}$

$7 \mid (bp - aq)'$. Check whether or not ~ is

equivalence relation on S.

(b) Let :

$$J = \{ p(x) \in \mathbf{Q}[x] \mid p(0) = 0 = p(1) \}.$$

Show that J is an ideal of $\mathbf{Q}[x]$. Also, fi

monic polynomial that generates

ideal J.

(c) Give two distinct elements of the group

$$\frac{\mathbf{C}[x]}{\langle x^3 + x \rangle}$$

with justification.

3. (a) Show that every element of $\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{Z}}$ is of fi

order. Further, if G is any group and H

proper normal subgroup of G, must ev

element of $\frac{G}{H}$ have finite order ? Give reasons for your answer. 5

(b) Let :

$$f : G \to H$$

be a non-trivial group homomorphism, where G has no non-trivial proper normal subgroup. Show that f is one-one. Deduce that there is no non-trivial group homomorphism from $\mathbf{Z}_p$ to S_4. 5

4. (a) Give an example, with justification, of a ring R with elements r and s such that $rs = 0$ but $sr \neq 0$. 2

(b) Show that in a ring, the sum of two nilpotent elements need not be nilpotent. 2

(c) Check whether or not $F = \frac{\mathbf{Q}[x]}{\langle 2 - 6x + x^3 \rangle}$ is a field. If F is a field, find $\overline{(1 - x)}^{-1}$. If F is not a field, find the quotient field of F. 6

5. Which of the following statements are true, and which are not ? Give reasons for your answers in the form of a short proof or a counter-example : 10

   (i) There is no non-abelian group of order 9.

   (ii) There is an injective ring homomorphism from $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$ to $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$.

   (iii) In a ring, every prime ideal is a maximal ideal.

   (iv) The maximum order an element of S_7 can have is 7.

   (v) $\{\mathbf{Z}, \text{IGNOU}, \mathbf{M}_n(\mathbf{R})\}$ is a set.

6. (a) Apply the principle of induction to show that :

$$(4^{n+1} + 5^{2n-1})$$

   is divisible by 21 $\forall\, n \in \mathbf{N}$. 4

   (b) Consider $G = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$, a group under multiplication modulo 12. Apply Cayley's theorem to find a permutation group isomorphic to G. 6

7. (a) Show that 10 has two distinct factorisations into irreducibles in $\mathbf{Z}[\sqrt{-6}]$. Hence, decide whether or not $\mathbf{Z}[\sqrt{-6}]$ is a Euclidean domain. 5

(b) Give an example, with justification of a group G whose centre is not G. 2

(c) Give two distinct left cosets of V_4 in S_4. Justify your answer. 3

$[V_4 = \{e, (1\ 2)\ (3\ 4), (1\ 3)\ (2\ 4), (1\ 4)\ (2\ 3)\}]$

MTE-06

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2020

एम.टी.ई.-06 : ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित :

अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i)* प्रश्न संख्या **5** **अनिवार्य** है।

(ii) बाकी के प्रश्नों में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है।

---

1. (क) जाँच कीजिए कि संक्रिया * के सापेक्ष Z एक समूह है या नहीं, जहाँ * $a * b = a + b + 1$ से परिभाषित है। 3

(ख) दर्शाइए कि कोई शून्येतर वलय समाकारिता

$f : \mathbf{Z}_5 \to \mathbf{Z}_7$ नहीं होती। 3

(ग) $\mathbf{R}[x]$ की एक ऐसी उच्चिष्ठ गुणजावली ज्ञात कीजिये जिसमें गुणजावली $\langle x^2 - 1, x^3 - 1 \rangle$ हो।

4

2. (क) मान लीजिए कि : 3

$$\mathrm{S} = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid (q, 7) = 1 \right\}$$

है। $\frac{p}{q} \sim \frac{a}{b}$ यदि और केवल यदि $7 \mid (bp - aq)'$ द्वारा S पर एक संबंध ~ परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि S पर ~ एक तुल्यता संबंध है या नहीं।

(ख) मान लीजिए कि : 5

$$J = \{p(x) \in \mathbf{Q}[x] \mid p(0) = 0 = p(1)\}.$$

दर्शाइए कि J, $\mathbf{Q}[x]$ की एक गुणजावली है। साथ ही, एक ऐसा एकगुणांकी बहुपद भी ज्ञात कीजिए जो गुणजावली J को जनित करता है।

(ग) पुष्टि करते हुए, समूह : 2

$$\frac{\mathbf{C}[x]}{\langle x^3 + x \rangle}$$

के दो अलग-अलग अवयव दीजिए।

3. (क) दर्शाइए कि $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ का प्रत्येक अवयव परिमित कोटि का है। साथ ही, यदि G कोई समूह है तथा G का H एक उचित प्रसामान्य उपसमूह है, तो क्या G/H का प्रत्येक अवयव परिमित कोटि का होना चाहिए ? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए। 5

(ख) मान लीजिए कि :

$$f : G \to H$$

एक अतुच्छ समूह समाकारिता है, जहाँ G का कोई अतुच्छ उचित प्रसामान्य उपसमूह नहीं है। दर्शाइए कि f एकैकी है। इस तरह सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{Z}_p$ से S_4 तक कोई अतुच्छ समूह समाकारिता नहीं है। 5

4. (क) पुष्टि करते हुए, एक ऐसे वलय R का उदाहरण दीजिए जिसमें ऐसे अवयव r और s हों जिनके लिए $rs = 0$ हो, परन्तु $sr \neq 0$ हो। 2

(ख) दर्शाइए कि किसी वलय में, दो शून्यंभावी अवयवों के योग का शून्यंभावी होना आवश्यक नहीं है। 2

(ग) जाँच कीजिए कि : 6

$$F = \frac{\mathbf{Q}[x]}{\langle 2 - 6x + x^3 \rangle}$$

एक क्षेत्र है या नहीं। यदि F एक क्षेत्र है, तो $\overline{(1-x)}^{-1}$ ज्ञात कीजिए। यदि F एक क्षेत्र नहीं है, तो F का विभाग क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

5. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से सत्य नहीं हैं ? अपने उत्तरों के लिए एक संक्षिप्त उपपत्ति या एक प्रति-उदाहरण के रूप में कारण दीजिए : 10

(i) कोटि 9 वाला कोई अनआबेली समूह नहीं होता।

(ii) $M_2(Z)$ से $M_3(Z)$ तक एक एकैकी वलय समाकारिता है।

(iii) एक वलय में, प्रत्येक अभाज्य गुणजावली एक उच्चिष्ठ गुणजावली होती है।

(iv) S_7 के किसी भी अवयव की अधिकतम कोटि 7 हो सकती है।

(v) $\{Z, IGNOU, M_n(R)\}$ एक समुच्चय है।

6. (क) यह दर्शाने के लिए कि $\forall n \in N$, $(4^{n+1} + 5^{2n-1})$, 21 द्वारा विभाज्य है, आगमन नियम का प्रयोग कीजिए। 4

(ख) गुणन मॉड्यूलो 12 के अंतर्गत एक समूह $G = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$ पर विचार कीजिए। G के तुल्याकारी एक क्रमचय समूह ज्ञात करने के लिए, केली प्रमेय का अनुप्रयोग कीजिए। 6

7. (क) दर्शाइए कि $Z[\sqrt{-6}]$ में 10 के अलग-अलग अखंडनीय गुणनखंडन हैं। इस तरह निर्णय लीजिए कि $Z[\sqrt{-6}]$ एक यूक्लिडीय प्रांत है या नहीं। 5

(ख) पुष्टि करते हुए, एक ऐसे समूह G का उदाहरण दीजिए जिसका केन्द्र G नहीं है। 2

(ग) S_4 में V_4 के दो वाम सहसमुच्चय दीजिए। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

$[V_4 = \{e, (1\ 2)\ (3\ 4), (1\ 3)\ (2\ 4), (1\ 4)\ (2\ 3)\}]$