No. of Printed Pages : 12

MTE-02

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

Term-End Examination

June, 2020

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : (i) *Attempt **five** questions in all.*

(ii) *Question No. 7 is compulsory.*

(iii) *Answer any **four** questions from Q. No. 1 to Q. 6.*

(iv) *Use of calculators is not allowed.*

---

1. (a) Let :

$$V = \mathbf{R}^3,$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 = x_3\}.$$

Show that W is a subspace of V. Further, find a basis for W, and hence, find the dimension of W. 4

(b) Define $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ by :

$$T(x, y, z) = (x - y + z, x + y, y + z).$$

Let $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1),\ v_3 = (0, 0, 1)$. Find the matrix of T with respect to the basis $\{v_1, v_2, v_3\}$. Further check whether T is invertible or not. 6

2. (a) Find the inverse of $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ by the row reduction method. 4

(b) Can the following linear system be solved by Cramer's rule ? Why or why not ?

Further, if Cramer's rule is applicable, use it to solve the following linear system. If the rule is not applicable, use the Gaussian elimination method to solve it : 6

$$x + y + 3z = 0$$

$$x - y - 4z = 3$$

$$-2x - y - 5z = 1.$$

3. (a) Let $0 < \theta < 2\pi, \theta \neq \pi$. Consider the linear transformation $T : C^2 \to C^2$ given by the matrix $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (w.r.t. the standard basis). Find vectors v_1, v_2 such that $T_{v_1} = e^{i\theta} v_1, T_{v_2} = e^{-i\theta} v_2$. Is $\{v_1, v_2\}$ a basis for C^2 ? Give reasons for your answer. 5

(b) Is $\left\{\sin x, \cos x, \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right\}$ a linearly independent set over $\mathbf{R}$? Justify your answer. 2

(c) Find the radius and the centre of the circular section of the sphere $|\boldsymbol{r}| = 17$, cut-off by the plane $\boldsymbol{r} \,.\, (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) = 6$. 3

4. (a) Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ be a linear operator with matrix $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ (w.r.t. the standard basis). Use Cayley-Hamilton theorem to check whether T is invertible or not. If T is invertible, obtain $T^{-1}(x, y)$ for $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. If T is not invertible, obtain the minimum polynomial of T. 5

(b) Reduce the following quadratic form to standard form and find its principal axes :

$$4x^2 - 4xy + y^2$$

Hence identify the type of conic represented by : 5

$$4x^2 + y^2 - 4xy = 1$$

5. (a) Complete $\{(2,0,3)\}$ to form an orthogonal basis of $\mathbf{R}^3$. 5

(b) Check whether or not the set of all symmetric matrices in $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ form a real vector space with respect to the usual addition and scalar multiplication for $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. 5

6. (a) Apply the fundamental theorem of homomorphism to prove that : 6

$$\frac{\mathbf{R}^4}{\mathbf{R}^2} \simeq \mathbf{R}^2$$

(b) Consider the linear operator $T : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ defined by :

$$T(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + iz_2, iz_1 - 2z_2 + iz_3, -iz_2 + z_3)$$

Check whether or not T is : 4

(i) self-adjoint

(ii) unitary

7. Which of the following statements are true ? Give reasons for your answers in the form of a short proof or a counter-example : 10

(i) If X = {D | D is a 2 × 2 diagonal matrix} and $D_1 \sim D_2$ iff $D_1 = cD_2$, $c \neq 0, c \in \mathbf{Z}'$, then ~ is an equivalence relation on X.

(ii) If two matrices A and B have the same eigen values, then A = B.

(iii) Any symmetric matrix is non-singular.

(iv) If $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$, then (1, 0) + V and (0, 1) + V are two distinct elements of $\frac{\mathbf{R}^2}{V}$.

(v) The function $< , > : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1^2 + x_2^2$ defines an inner product over $\mathbf{R}^2$.

MTE-02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2020

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : (i) कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) प्रश्न संख्या 7 करना जरूरी है।

(iv) कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) मान लीजिए :

$$V = \mathbf{R}^3, W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 = x_3\}$$

दिखाइये कि W, V की उपसमष्टि है। आगे का एक आधार ज्ञात कीजिए और इस तरह W की विमा ज्ञात कीजिए।

(ख) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ को

$$T(x, y, z) = (x - y + z, x + y, y + z)$$

द्वारा परिभाषित कीजिए। मान लीजिए $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)$। आधार $\{v_1, v_2, v_3\}$ के सापेक्ष T का आव्यूह प्राप्त कीजिए। आगे जाँच कीजिए कि T व्युत्क्रमणीय है या नहीं। 6

2. (क) पंक्ति समानयन द्वारा $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 4

(ख) क्या निम्नलिखित रैखिक निकाय क्रेमर नियम से हल किया जा सकता है ? क्यों या क्यों नहीं ? आगे, यदि क्रेमर नियम लागू होता है तो उससे अग्रलिखित रैखिक निकाय को हल कीजिए। यदि

क्रेमर नियम लागू नहीं होता तो गाउसीय निराकरण विधि से हल कीजिए : 6

$$x + y + 3z = 0$$

$$x - y - 4z = 3$$

$$-2x - y - 5z = 1.$$

3. (क) मान लीजिए $0 < \theta < 2\pi, \theta \neq \pi$ है। रैखिक रूपांतरण $T : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, जिसका मानक आधार के सापेक्ष आव्यूह $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ है, लीजिए। सदिश v_1, v_2 ज्ञात कीजिए जिसके लिए, $Tv_1 = e^{i\theta}v_1, Tv_2 = e^{-i\theta}v_2$ । क्या $\{v_1, v_2\}$ $\mathbf{C}^2$ का एक आधार है ? अपने उत्तर का कारण बताइए। 5

(ख) क्या $\left\{\sin x, \cos x, \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right\}$ $\mathbf{R}$ पर रैखिकतः स्वतन्त्र है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2

(ग) गोले $|r| = 17$ के समतल $r.(i - j + 2k) = 6$ द्वारा परिच्छेद की त्रिज्या और केन्द्र ज्ञात कीजिए। 3

4. (क) रैखिक संकारक $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, जिसका मानक आधार के सापेक्ष आव्यूह $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ है, लीजिए। कैले-हैमिल्टन प्रमेय का प्रयोग करके जाँच कीजिए कि T व्युत्क्रमणीय है या नहीं। यदि T व्युत्क्रमणीय है तो प्रत्येक $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ के लिए $T^{-1}(x, y)$ प्राप्त कीजिए। यदि T व्युत्क्रमणीय नहीं है तो T का अल्पिष्ट बहुपद प्राप्त कीजिए। 5

(ख) निम्नलिखित द्विघाती समघात को मानक रूप में समानीत कीजिए और मुख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए :

$$4x^2 - 4xy + y^2$$

इस तरह शांकव $4x^2 - 4xy + y^2 = 1$ को पहचानिए। 5

5. (क) $\{(2,0,3)\}$ को पूरा करके $\mathbf{R}^3$ का लांबिक प्रसामान्य आधार बनाइए। 5

(ख) जाँच कीजिए कि $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ में सममित आव्यूहों का समुच्चय, आव्यूहों के साधारण योग और अदिश गुणन के सापेक्ष एक वास्तविक सदिश समष्टि है या नहीं। 5

6. (क) समाकारिता की मूल प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि : 6

$$\frac{\mathbf{R}^4}{\mathbf{R}^2} \simeq \mathbf{R}^2$$

(ख) $\mathrm{T}:\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$, $\mathrm{T}(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + iz_2, iz_1 - 2z_2 + iz_3, -iz_2 + z_3)$ द्वारा परिभाषित रैखिक संकारक लीजिए। जाँच कीजिए कि :

(i) T स्वसंलग्न है।

(ii) T ऐकिक है।

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ? लघु उत्पत्ति या प्रति उदाहरण द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : 10

(i) यदि $X = \{D \mid D$ एक 2×2 अदिश आव्यूह है। और $D_1 \sim D_2$ यदि और केवल यदि $D_1 = cD_2 \neq 0, c \in \mathbf{Z}'$, तो $\sim$ X पर एक तुल्यता संबंध है।

(ii) यदि दो आव्यूहों A और B के आइगेन मान समान हैं तो $A = B$।

(iii) कोई भी सममित आव्यूह व्युत्क्रमणीय है।

(iv) यदि $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$, तब $(1, 0) + V$ और $(0,1) + V, R^2 / V$ के अलग अवयव हैं।

(v) फलन :

$$<,>: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1^2 + x_2^2,$$

$\mathbf{R}^2$ पर आंतर गुणनफल को परिभाषित करता है।