

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-01 : CALCULUS

Time : 2 Hours]

[Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note: Q. No. 1 is compulsory. Attempt any four questions from Q No. 2 to 7.

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answer in the form of a short proof or a counter example : 10
- (i) $\cos(x+1)$ is an even function of x .
 - (ii) The greatest integer function is continuous on $]2, 3[$.
 - (iii) Every integrable function is monotonic.
 - (iv) The volume of a solid generated by revolving a curve about the x -axis is the same as that obtained by revolving the curve about the y -axis.
 - (v) The tangent to any line at any point on the line is the line itself.



2. (a) Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$. 2
- (b) Find $\frac{dy}{dx}$, if 5
- (i) $y = \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4}}$,
- (ii) $y = \sqrt{\cos \operatorname{cosec} x}$.
- (c) Find the area under the curve $y = 5e^{2x}$ between $x = 0$ and $x = 3$. Also give a rough sketch of this area. 3
3. (a) A particle starts from rest and moves in a straight line, and the distance travelled after t secs from the start is given by
- $$S = 2t^3 - 15t^2 + 36t \text{ metres.}$$
- Find when the velocity of the particle becomes zero. Also, find the velocity after (i) 1 sec, (ii) $2\frac{1}{2}$ sec. 3
- (b) Find the perimeter of the curve $r = 3(1 + \sin \theta)$. 5
- (c) Find if there are any asymptotes of the curve $xy^2 = 10x^2 - 7y^2$, parallel to the axes. 2

4. (a) Find the largest subset of R the set of real numbers, on which the function $f: R \rightarrow R$ is continuous.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & , \quad x < 1 \\ x+5 & , \quad 1 \leq x < 5 \\ 2x & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

Also, draw a graph of f . 6

- (b) Find the points of inflection of the curve

$$(x^2 + 4x + 5)e^{-x} \quad 4$$

5. (a) If $y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$ show that

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - 1)y_n = 0. \quad 4$$

- (b) Find a reduction formula for $\int (\ln x)^n dx$. 3

- (c) Use Simpson's Rule with $n=6$ to

approximate $\int_0^3 \frac{dy}{1+y^2}$. 3

6. (a) Evaluate: $\int_3^5 \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x} dx$. 4

- (b) Find an approximate value of $\ln(\frac{1}{2})$ upto 4 decimal places using Mchaurin's expansion.

4

(c) Find the maximum possible domain of the

function f , define by $f(z) = \sqrt{\left(\frac{z-1}{2-z}\right)}$. 2

7. (a) Find the maximum and minimum values of the function $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$f(t) = 4 \sin t + 3 \cos t$. 4

(b) Find the upper and lower integrals for the function f , defined by $f(x) = |2x+1|$, in the interval $[1, 3]$. Hence decide if f is integrable over $[1, 3]$. 4

(c) Find $\frac{d}{dx} \left(\int_{-2}^{70e^x} e^{t^2} dt \right)$. 2

—x—

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)-

सत्रांत परीक्षा

एच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-01 : फलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से प्रश्न सं. 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य या असत्य हैं? अपने उत्तर का एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण के रूप में स्पष्टीकरण दीजिए : 20
 - (i) $\cos(x+1)$, x का एक सम फलन है।
 - (ii) अधिकतम पूर्णांक फलन, $]2, 3[$ पर संतत है।
 - (iii) प्रत्येक समाकलनीय फलन एकदिष्ट होता है।
 - (iv) एक वक्र को x -अक्ष के सापेक्ष घुमाने से प्राप्त घनाकृति का आयतन वही होता है जो कि उस वक्र को y -अक्ष के सापेक्ष घुमाने से प्राप्त होता है।
 - (v) किसी रेखा के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा वही रेखा होती है।

2. (क) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ ज्ञात कीजिए। 2

(ख) $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि 5

(i) $y = \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4}}$,

(ii) $y = \sqrt{\cos ecx}$.

(ग) वक्र $y = 5e^{2x}$ से घिरा $x=0$ और $x=3$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। इस क्षेत्रफल का एक मोटे तौर पर आरेख भी दीजिए। 3

3. (क) एक कण विराम से प्रारंभ करता है और सरल रेखा में गति करता है। प्रारंभ बिंदु से t सेकेंड के बाद तय की गयी दूरी

$$S = 2t^3 - 15t^2 + 36t \text{ मीटर द्वारा}$$

दी गयी है। वह समय ज्ञात कीजिए जब कण का वेग शून्य होता है निम्नलिखित समय के बाद वेग भी ज्ञात कीजिए :

(i) 1 सेकेंड (ii) $2\frac{1}{2}$ सेकेंड 3

(ख) वक्र $r = 3(1 + \sin \theta)$ की परिमाप ज्ञात कीजिए। 5

(ग) वक्र $xy^2 = 10x^2 - 7y^2$ की अक्षों के समांतर अनंतस्पर्शी (यदि हैं तो) ज्ञात कीजिए। 2

4. (क) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R का वह उच्चिष्ठ उपसमुच्चय ज्ञात कीजिए जिसमें

$$f(x) = \begin{cases} |x| & , \quad x < 1 \\ x+5 & , \quad 1 \leq x < 5 \\ 2x & , \quad x \geq 5 \end{cases} \text{ द्वारा परिभाषित}$$

फलन $f: R \rightarrow R$ संतत है। f का आलेख भी बनाइए। 6

- (ख) वक्र $(x^2 + 4x + 5)e^{-x}$ के अवनति बिंदु ज्ञात कीजिए। 4

5. (क) यदि $y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$ है, तो दर्शाइए कि $x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - 1)y_n = 0$ है। 4

(ख) $\int (\ln x)^n dx$ के लिए समानयन सूत्र ज्ञात कीजिए। 3

(ग) $n=6$ के साथ सिम्प्सन नियम का प्रयोग करके

$$\int_0^3 \frac{dy}{1+y^2} \text{ का सन्निकरन मान ज्ञात कीजिए। } 3$$

6. (क) $\int_3^5 \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x} dx$ का मूल्यांकन कीजिए। 4

(ख) मैक्लॉरिन प्रसार का प्रयोग करके $\ln(1.1)$ का दशमलव के चार स्थानों तक सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए। 4

(ग) $f(z) = \sqrt{\left(\frac{z-1}{2-z}\right)}$ द्वारा परिभाषित फलन f का अधिकतम संभावित प्रांत ज्ञात कीजिए। 2

7. (क) $f(t) = 4 \sin t + 3 \cos t$ द्वारा परिभाषित फलन $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए। 4

(ख) अंतराल $[1, 3]$ में $f(x) = |2x+1|$ द्वारा परिभाषित फलन f के उपरि और निम्न समाकलन ज्ञात कीजिए। 4

(ग) $\frac{d}{dx} \left(\int_{-2}^{70e^x} e^{t^2} dt \right)$ ज्ञात कीजिए। 2

—x—