No. of Printed Pages : 8

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

June, 2019

01802

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt any ***five*** parts : *5×2=10*

(a) Define a unitary matrix. Verify that $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ is unitary.

(b) Show that the function $w = z^3$ satisfies the Laplace equation.

(c) Calculate the residue of the function $\frac{ze^z}{(z-a)^3}$.

(d) Obtain the Laplace transform of te^{at}.

(e) Show that velocity is a contravariant vector.

(f) Plot Laguerre polynomials

$$Ln(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \text{ versus } x \text{ for } n = 1.$$

(g) Given that

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

write the first three terms of $J_0(x)$ and $J_1(x)$.

(h) Show that $\{1, -1, i, -i\}$ forms a cyclic group of order 4.

2. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Obtain the eigenvalues and eigenvectors of the matrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Show that the eigenvectors are orthogonal.

(b) Prove that the eigenvectors belonging to distinct eigenvalues of a Hermitian matrix are orthogonal to each other.

(c) Enumerate all the symmetries of an equilateral triangle.

3. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Obtain the Laurent series expansion of the function $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)^2 (z+3)}$ about $z = 1$.

(b) Evaluate $\oint \dfrac{e^z}{z(z+1)} dz$, where C is the circle $|z - 1| = 3$.

(c) Evaluate the contour integral $\oint ze^{1/z} dz$ around a unit circle about the origin.

4. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Calculate the inverse Laplace transform of the function

$$F(s) = \frac{6}{s^2 - 4s - 5}.$$

(b) Obtain the Fourier cosine transform of the function

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} & 0 < t < a \\ \dfrac{2a - t}{a} & 0 < t < 2a \\ 0 & t > 2a \end{cases}.$$

(c) Solve the initial value problem

$$y'' + 2y' - 8y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 8.$$

5. Attempt any ***one*** part : *1×10=10*

(a) Using the generating function of Hermite polynomials

$$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

prove the orthogonality relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \, dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \, \delta_{nm},$$

where δ_{nm} is the Kronecker delta.

(b) The generating function for Legendre polynomials is

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \, t^n$$

Using this relation, obtain the recurrence relation

$$(2n + 1)x \, P_n(x) = (n + 1) \, P_{n+1}(x) + n \, P_{n-1}(x).$$

Also obtain the value of $P_2(x)$. *8+2*

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2019

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : ***सभी*** *प्रश्न कीजिए । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

1. कोई ***पाँच*** भाग हल कीजिए : *5×2=10*

   (क) ऐकिक आव्यूह को परिभाषित कीजिए । सिद्ध कीजिए कि $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ऐकिक है ।

   (ख) सिद्ध कीजिए कि फलन $w = z^3$ लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है ।

   (ग) फलन $\frac{ze^z}{(z-a)^3}$ का अवशिष्ट परिकलित कीजिए ।

   (घ) te^{at} का लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए ।

   (ङ) सिद्ध कीजिए कि वेग एक प्रतिपरिवर्ती सदिश है ।

(च) $n = 1$ के लिए लागेर बहुपदों

$$Ln(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

और x के बीच आलेख खींचिए ।

(छ) दिया गया है कि

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$J_0(x)$ और $J_1(x)$ के पहले तीन पद लिखिए ।

(ज) सिद्ध कीजिए कि $\{1, -1, i, -i\}$ कोटि 4 का एक चक्रीय समूह बनाता है ।

2. कोई ***दो*** भाग हल कीजिए : *2×5=10*

(क) निम्न आव्यूह के आइगेनमान और आइगेनसदिश प्राप्त कीजिए :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

सिद्ध कीजिए कि आइगेनसदिश लांबिक हैं ।

(ख) सिद्ध कीजिए कि हर्मिटी आव्यूह के भिन्न आइगेनमानों के संगत आइगेनसदिश एक-दूसरे के प्रति लांबिक हैं ।

(ग) समबाहु त्रिभुज की सभी सममिति संक्रियाएँ बताइए ।

3. कोई *दो* भाग हल कीजिए : *2×5=10*

(क) $z = 1$ के प्रति फलन $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}$ का लौराँ श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए ।

(ख) $\oint \dfrac{e^z}{z(z+1)} dz$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ C, $|z-1| = 3$ का वृत्त है ।

(ग) मूल-बिन्दु के प्रति एकक वृत्त वाले कंटूर समाकल $\oint ze^{1/z} dz$ का मूल्यांकन कीजिए ।

4. कोई *दो* भाग हल कीजिए : *2×5=10*

(क) फलन $F(s) = \dfrac{6}{s^2 - 4s - 5}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए ।

(ख) फलन

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} & 0 < t < a \\ \dfrac{2a-t}{a} & 0 < t < 2a \\ 0 & t > 2a \end{cases}$$

का फूरिये कोज्या (कोसाइन) रूपांतर प्राप्त कीजिए ।

(ग) आदि मान समस्या

$$y'' + 2y' - 8y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 8$$

हल कीजिए ।

5. कोई ***एक*** भाग हल कीजिए : *1×10=10*

(क) हर्मिट बहुपदों के निम्नलिखित जनक फलन

$$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

का उपयोग कर लांबिकता संबंध सिद्ध कीजिए

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \, dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \, \delta_{nm},$$

जहाँ δ_{nm} क्रोनेकर डेल्टा है ।

(ख) लेजान्ड्रे बहुपदों का जनक फलन निम्नलिखित है :

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

इस संबंध का उपयोग कर, पुनरावृत्ति संबंध

$$(2n + 1)x P_n(x) = (n + 1) P_{n+1}(x) + n P_{n-1}(x)$$

प्राप्त कीजिए । $P_2(x)$ का मान भी प्राप्त कीजिए । *8+2*