01552

No. of Printed Pages : 14

MTE-14

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination, 2019

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours] **[Maximum Marks : 50**

[Weightage : 70%

Note : Answer **any five** questions. Use of calculator is not allowed.

---

1. (a) A particle just clear a wall of height 'b' at a distance 'a' and strikes the ground at a distance 'c' from the point of projection. Prove that the angle of projection is : [5]

$$\tan^{-1}\frac{bc}{a(c-a)}$$

and the velocity of project V is given by :

$$\frac{2V^2}{g}=\frac{a^2(c-a)^2+b^2c^2}{ab(c-a)}$$

(b) Consider a rat population x (t) at any time t (> 0). If ax is birth rate and bx^2 is the death rate (a, b being constants), then formulate the model of the rat population. If initial population is 120 rats and there are 8 births and 6 deaths per month occurring at t = 0, how many months does it take for x(t) to read 95% of the limiting population $\left(\frac{a}{b}\right)$? [5]

2. (a) Suppose that the population x and y satisfy the equation :

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

Find the critical points of the system. Which critical point represents the possibility of coexistence of the two species ? Discuss the type and stability of that critical point. [5]

(b) Let the returns on the securities of two companies x and y be given as below :

Event(j)	Chance ($p_{1j} = p_{2j}$)	Return	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0.2	6	7
2	0.4	13	8
3	0.7	18	11

Find the expected returns of the portfolios P = (0.7, 0.3) and Q = (0.4, 0.5). Which portfolio gives better returns ? [5]

3. (a) Find the range of values of p and q which will render the entry (2, 2) a seddle point for the following game : [3]

	Player B		
Player A	2	4	5
	10	7	q
	4	p	6

(b) Check whether the equation :

$$s = s_0 + v_0 t - 0.5gt^2$$

is dimensionally competible if s is the position of

the body at time t, s_0 is the position at t = 0, v_0 is initial velocity and g is the acceleration due to gravity. [2]

(c) Consider a single server queueing system with Poisson input, exponential service times, suppose the mean arrival rate is 3 calling units per hours, the expected service time is 0.25 hour. and the maximum permissible calling units in the system is two. Derive the steady state probability distribution of the number of calling units in the system and then calculate the expected number of calling units in the system. [5]

4. (a) The quarterly production of T.V. sets in a factory for three quarters were 2500, 2625 and 2850, respectively. Use exponentional smoothly based upon the first three observations to forcast production in the fifth period, any $\alpha = 0.1$ and $\beta = 0.2$, where $\hat{y} = \alpha + \beta x$ gives the best fitted line to the data relationship. From the past data (prior to the three data points), a straight line was fit. The value on the line corresponding to the last observed time is 2450 and the slope

is 90. [5]

(b) A short-run cost function for an entrepreneur is $q^3 - 8q^2 + 30q + 60$. Determine the price at which the entrepreneur ceases production in an ideal market. Also derive the supply function. [5]

5. (a) Find the escape velocity of Jupiter for the following data :

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3/kg, radius = 2.58×10^7 m, mass = 1.966×10^{20} kg [2]

(b) Estimate the plume rise by means of the Moses and Carson formula when the heat-emission rate associated with a stack gas is 3000 kj/s, the wind and stack gas speeds are 5 and 20 m/s, respectively and the inside stack diameter at the top is 4 m. [3]

(c) Formulate the model equation for a ball dropped from a height h metres against air resistance proportional to square of its velocity. Find the velocity of the ball at any time t. Also find the limiting velocity as $t \to \infty$. [5]

6. (a) Find the terminal velocity and time taken by a raindrop of radius 0.8 cm to reach the ground if it starts its descent in a cloud 35000 m high. [2]

(b) A drug is induced in patient's bloodstream at a constant rate of r gms/sec. Simultaneously the drug is removed at a rate proportional to the amount x(t) of the drug present at any time t. Determine the differential equation governing the amount x(t). If the initial concentration of the drug in the bloodstream is x_0, find the concentration of the drug at any time t. [3]

(c) Derive the equation of motion of the linear model for a simple pendulum. Find its solution under boundary conditions at t = 0, $\theta = 0$ and $\frac{d\theta}{dt} = w$ where θ is the angular distance. [5]

7. (a) A tumour may be modelled as a population of multiplying cells. It is found empirically that the birth rate r(t) of the cells in a tumour decreases exponentially with time, so that $r(t) = \beta e^{-\alpha t}$, where α and β are positive constants. If P(t) denotes the population of cells at any time t and

P_0 is the initial population, then : [6]

(i) formulate the mathematical model of the population of cells.

(ii) solve the model equation obtained in (i) above to find the population P(t) at any time t.

(iii) interpret the behaviour of the population based on the solution obtained and also find the limiting value of P(t) as $t \to \infty$.

(b) Characterise the following as deterministic or stochastic giving reason for your answer : [4]

(i) Dispersion of the pollutant in the atmosphere.

(ii) Treating waste water using chemicals or natural processes.

(iii) Predicting the state of national economy.

(iv) Non-resident Indian business person setting up a business in India.

----- x -----

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा, 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे **अधिकतम अंक : 50**

(कुल का : 70%)

नोट : कोई पाँच प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) एक कण दूरी 'a' पर ऊँचाई 'b' की दीवार को पार करता है और प्रक्षेप बिंदु से दूरी 'c' पर जमीन पर गिरता है, तब सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप कोण :

$\tan^{-1}\frac{bc}{a(c-a)}$ होगा और प्रक्षेप के समय कण का आवेग V, $\frac{2V^2}{g}=\frac{a^2(c-a)^2+b^2c^2}{ab(c-a)}$ से प्राप्त होगा।

[5]

(ख) किसी भी समय t (> 0) पर चूहों की जनसंख्या x (t) लीजिए। यदि ax जन्म दर हो और bx^2 मृत्यु दर हो, जहाँ a और b अचर हैं, तब चूहों की जनसंख्या का निदर्शन कीजिए। यदि आरम्भिक जनसंख्या 120 चूहे हैं और समय t = 0 पर प्रतिमाह 8 जन्म और 6 मृत्यु होती हों तो जनसंख्या x(t) को सीमान्त जनसंख्या $\left(\frac{a}{b}\right)$ के 95% तक पहुचने में कितने माह लगेंगे ? [5]

2. (क) मान लीजिए समष्टियाँ x और y निम्नलिखित समीकरण को संतुष्ट करती हैं :

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

निकाय के क्रान्तिक बिन्दु ज्ञात कीजिए। कौन सा क्रान्तिक बिन्दु दो स्पीशीज के सह-अस्तित्व की सम्भावना को निरूपित करता है ? इस क्रांतिक बिंदु के प्रकार और स्थायित्व की चर्चा कीजिए। [5]

(ख) मान लीजिए दो प्रतिभूतियों x और y का प्रतिफल नीचे दिया गया है :

घटना (j)	संयोग ($p_{1j} = p_{2j}$)	प्रतिफल	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0.2	6	7
2	0.4	13	8
3	0.7	18	11

निवेश सूची P = (0.7, 0.3) और Q = (0.4, 0.5) के प्रत्याशित प्रतिफल ज्ञात कीजिए। कौन सी निवेश सूची बेहतर प्रतिफल देती है ? [5]

3. (क) p और q के मानों की परिसर ज्ञात कीजिए जिसके लिये निम्नलिखित खेल का पलायन बिन्दु प्रविष्टि (2, 2) हो जाता है : [3]

	खिलाड़ी B		
खिलाड़ी A	2	4	5
	10	7	q
	4	p	6

(ख) यदि समय t पर वस्तु की स्थिति s है, t_0 पर स्थिति s_0 है, v_0 प्रारम्भिक वेग है और g गुरुत्वीय त्वरण है, तब जाँच

कीजिए कि समीकरण $s = s_0 + v_0 t - 0.5gt^2$ विमीय रूप से सुसंगत है या नहीं। [2]

(ग) प्वासों निवेश और चरघातांकीय सेवा काल वाली एक एकल सेवाकर्ता पंक्ति प्रणाली लीजिए। मान लीजिए कि माध्य आगमन दर प्रति घंटा 3 काल यूनिट है, प्रत्याशित सेवा काल 0.25 घंटा है और प्रणाली में अधिकतम अनुमत कांल यूनिट दो हैं। प्रणाली में कॉल यूनिटों की संख्या के लिये अपरिवर्ती अवस्था प्रायिकता बंटन व्युत्पन्न कीजिए और तब प्रणाली में कॉल यूनिटों की प्रत्याशित संख्या परिकलित कीजिए। [5]

4. (क) एक फैक्ट्री में तीन तिमाही में टी.वी. सैटों का तिमाही उत्पादन क्रमशः 2500, 2625 और 2850 था। $\alpha = 0.1$ और $\beta = 0.2$ मानकर पाँचवी अवधि मे होने वाले उत्पादन का पूर्वानुमान लगाने के लिये प्रथम तीन प्रेक्षणों पर आधारित चरघातांकी मसृणीकरण का प्रयोग कीजिए जहाँ $\hat{y} = \alpha + \beta x$ आंकड़ा सम्बन्ध की श्रेष्ठतम आसंजन रेखा को निरूपित करते हैं। पिछले आंकड़ों (तीन आंकड़ा बिन्दु से पहले) से सरल रेखा आसंजित की गयी थी। रेखा पर अंतिम प्रेक्षित समय का संगत मान 2450 है और प्रवणता 90 है। [5]

(ख) एक उद्यम के अल्पकालिक लागत फलन $q^3 - 8q^2 + 30q + 60$ है निर्धारित कीजिए कि उद्यमकर्ता आदर्श बाजार में

किस कीमत पर उत्पादन को रोक देता है। पूर्ति फलन भी व्युत्पन्न कीजिए। [5]

5. (क) निम्नलिखित आंकड़े के लिये बृहस्पति का पलायन वेग ज्ञात कीजिए :

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3/kg$, त्रिज्या $= 2.58 \times 10^7\ m$, द्रव्यमान $= 1.966 \times 10^{20}\ kg$. [2]

(ख) स्टैक गैस से सम्बन्धित ऊष्मा उत्सर्जन दर 3000 kJ/s है, पवन चाल और सटैक गैस चाल क्रमशः 5 और 20 m/s है और ऊपरी सिरे पर स्टैक का अन्तःव्यास um है। मोसेज और कार्सन सूत्र की सहायता से पिच्छक उत्थान आंकलित कीजिए। [3]

(ग) एक गेंद को वातावरण में h ऊँचाई से गिराया गया है जहाँ वायु प्रतिरोध वेग के वर्ग के समानुपाती है। इसके निदर्श समीकरण का सूत्रण कीजिए। किसी भी समय t पर गेंद का वेग ज्ञात कीजिए। $t \to \infty$ के लिये सीमांत वेग भी ज्ञात कीजिए। [5]

6. (क) त्रिज्या 0.8 cm वाली एक वर्षा की बूंद का अंतिम वेग तथा उसके भूमि तक पहुंचने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए, यदि वह 35000 m ऊँचे एक बादल से गिरना प्रारम्भ करती है। [2]

(ख) कोई दवाई एक रोगी की रक्तधारा में r gms/sec की अचर दर से डाली जा रही है। इसके साथ ही यह दवाई किसी भी समय t पर मौजूदा दवाई की मात्रा x(t) के समानुपाती दर से निकाली जा रही है। मात्रा x(t) नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण निर्धारित कीजिए। यदि रक्तधारा में दवाई की प्रारम्भिक सांद्रता x_0 है, तो दवाई की किसी भी समय t पर सांद्रता ज्ञात कीजिये। [3]

(ग) सरल लोलक के लिये रैखिक निदर्श की गति का समीकरण व्युत्पन्न कीजिए। सीमा प्रतिबंधों t = 0 पर $\theta = 0$ और $\frac{d\theta}{dt} = w$ के अधीन इसका हल ज्ञात कीजिये जहाँ θ कोणीय दूरी है। [5]

7. (क) एक ट्यूमर का निदर्शन गुणित हो रही कोशाणुओं की जनसंख्या के रूप में किया जा सकता है। आनुभाविक रूप से यह देखा गया है कि एक ट्यूमर में कोशाणुओं की 'जन्मदर' r(t) में समय के साथ चरघातांकीय रूप में कमी आती जाती है जिससे कि $r(t) = \beta e^{-\alpha t}$, जहाँ α और β धनात्मक स्थिरांक हैं। यदि P(t) किसी भी समय t पर कोशाणुओं की जनसंख्या है और P_0 प्रारम्भिक जनसंख्या हो, तो : [6]

(अ) कोशाणुओं की जनसंख्या का गणितीय निदर्शन कीजिए।

(ब) जनसंख्या P(t) का मान किसी भी समय t पर प्राप्त करने के लिये ऊपर (अ) में प्राप्त निदर्शन समीकरण को हल कीजिये।

(स) प्राप्त हल की सहायता से जनसंख्या के व्यवहार की व्याख्या कीजिए। P(t) का सीमान्त मान भी ज्ञात कीजिये। जबकि $t \to \infty$

(ख) अपने उत्तरों का कारण देते हुए निम्नलिखित को निर्धारणात्मक और प्रसंभाव्य के रूप में अभिलक्षणित कीजिए: [4]

(अ) पर्यावरण के प्रदूषक का परिक्षेपण।

(ब) रासायनिक या प्राकृतिक प्रक्रियाओं द्वारा अपशिष्ट जल का उपचार करना।

(स) देश की अर्थव्यवस्था की स्थिति का पूर्वानुमान लगाना।

(द) अनिवासी भारतीय व्यवसायी का भारत में व्यवसाय स्थापित करना।

------x------