No. of Printed Pages : 8

MTE-13

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

02012

June, 2019

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

1. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Justify your answers. 10

   (a) For two logical statements p and q, $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$ is a contradiction.

   (b) The probability of getting a total of seven, when two dice are thrown is $\frac{1}{6}$.

   (c) Proof by contradiction requires giving a counter example.

   (d) $a_n a_{n-3} - 5a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 0$ is a recurrence relation of degree three.

   (e) The graph $K_{m,n}$ is Hamiltonian, when m + n is odd.

2. (a) Using the Principle of Mathematical Induction, prove that

$$3.2^2 + 3^2.2^3 + 3^3.2^4 + \dots + 3^n.2^{n+1} = \frac{12}{5}(6^n - 1)$$

for all $n \in \mathbf{N}$. 4

(b) Let G be a (p, q)-graph, each of whose vertices has degree m or (m + 2). If G has p_m vertices of degree m and p_{m+2} vertices of degree m + 2, then show that

$$p_m = \frac{1}{2}(m + 2)\, p - q.$$ 3

(c) In a group of 10 persons, six are females and the remaining are males. A committee of 5 persons is to be formed which must include at least one male. Find the number of all such committees. 3

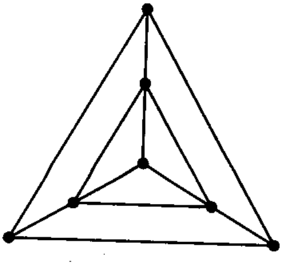
3. (a) Find the sum of the following series : 4

$$\frac{1^2}{0!} - \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n^2}{(n-1)!} + \dots$$

(b) Obtain the disjunctive normal form for the Boolean expression

$$(x_1 \vee x_3)' \vee (x_2' \vee x_3')'.$$ 3

(c) Find δ(G) and χ(G) for the following graph, G : 3



4. (a) Solve the recurrence relation

$$a_n - 3a_{n-1} = 0, \;\; n \geq 1 \text{ and } a_0 = 2,$$

using generating functions. *4*

(b) Calculate the Stirling number, S_4^3. *3*

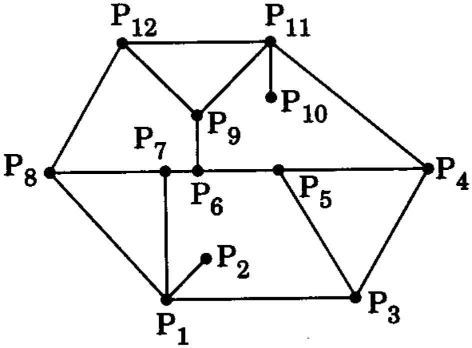
(c) Show that for a self-complementary graph (p, q), four is a factor of either p or (p – 1). *3*

5. (a) Test the validity of the following argument using a truth table : *5*

"If there is a cricket match in a city, then travelling in the city is difficult. If the cricket teams arrived on time, then travelling in the city was not difficult. The teams arrived on time. Therefore, there was no cricket match."

(b) How many numbers from 0 to 999 (0 and 999 included) are not divisible by 7 or by 11 ? *3*

(c) Find the number of regions in the following graph : *2*



6. (a) Find the number of 6-digit numbers, the product of whose digits in each case is 24. *4*

(b) Write the contrapositive, converse and negation of the following statements : *3*

"If $n \in \mathbf{N}$ is odd, then n is the sum of three odd primes."

(c) Solve the recurrence

$a_n + 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = 5^n \ (n \geq 2).$ *3*

7. (a) Construct a 3-regular graph on 10 vertices. Is there a unique 3-regular graph on 6 vertices, up to isomorphism ? Justify your answer. *4*

(b) Solve the recurrence

$b_{n+2}^2 = 4b_{n+1}^2, \ b_n > 0$ and $b_1 = 4.$ *4*

(c) Find the number of permutations of the letters of the word RECURRENCE. *2*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

***नोट :** प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है । प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है ।*

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से *असत्य*? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । *10*

(क) दो तार्किक कथनों p और q के लिए

$(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \to q)$ एक अंतर्विरोध है ।

(ख) दो पासे फेंके जाने पर कुल सात आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है ।

(ग) अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति के लिए प्रत्युदाहरण देना पड़ता है ।

(घ) $a_n a_{n-3} - 5a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 0$ घात तीन का पुनरावृत्ति संबंध है ।

(ङ) $m + n$ विषम होने पर ग्राफ $K_{m, n}$ हैमिल्टोनियन है ।

2. (क) गणितीय आगमन नियम से सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए 4

$$3.2^2 + 3^2.2^3 + 3^3.2^4 + ... + 3^n.2^{n+1} = \frac{12}{5}(6^n - 1).$$

(ख) मान लीजिए G एक (p, q)-ग्राफ है, जिसके शीर्षों की कोटि m या (m + 2) है । यदि G में p_m शीर्ष कोटि m वाले हैं और p_{m+2} शीर्ष कोटि m + 2 वाले हैं, तब दिखाइए कि $p_m = \frac{1}{2}(m + 2)\,p - q$. 3

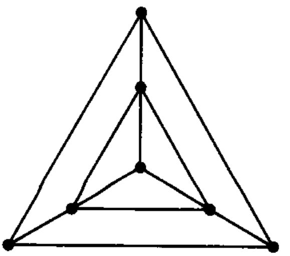
(ग) दस व्यक्तियों के एक समूह में छह महिलाएँ और शेष पुरुष हैं । पाँच व्यक्तियों की एक समिति बनाई जानी है जिसमें कम-से-कम एक पुरुष होना ज़रूरी है । ऐसी सभी समितियों की संख्या ज्ञात कीजिए । 3

3. (क) निम्नलिखित श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए : 4

$$\frac{1^2}{0!} - \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{n^2}{(n-1)!} + ...$$

(ख) बूलीय व्यंजक $(x_1 \vee x_3)' \vee (x'_2 \vee x'_3)'$ के लिए सम्मिलन प्रसामान्य समघात प्राप्त कीजिए । 3

(ग) निम्नलिखित ग्राफ G के लिए $\delta(G)$ और $\chi(G)$ ज्ञात कीजिए : 3



4. (क) जनक फलनों द्वारा पुनरावृत्ति संबंध

$a_n - 3a_{n-1} = 0, \; n \geq 1$ और $a_0 = 2$

को हल कीजिए । 4

(ख) स्टर्लिंग संख्या S_4^3 को परिकलित कीजिए । 3

(ग) सिद्ध कीजिए कि स्वपूरक ग्राफ (p, q) के लिए, चार p या (p – 1) का गुणक है । 3

5. (क) सत्य सारणी से निम्नलिखित तर्क की मान्यता की जाँच कीजिए : 5

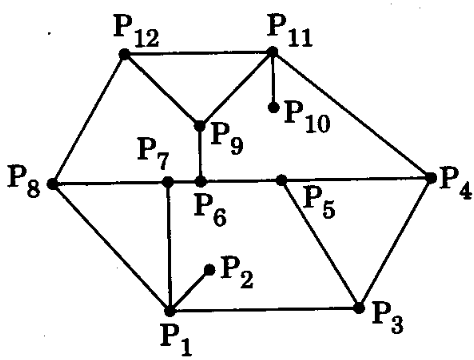
"यदि शहर में क्रिकेट मैच है, तो शहर में यात्रा करने में दिक्कत होती है ।

यदि क्रिकेट टीमें समय पर पहुँचीं, तो शहर में यात्रा करने में दिक्कत नहीं हुई ।

टीमें समय पर पहुँचीं । इसलिए क्रिकेट मैच नहीं हुआ ।"

(ख) 0 से लेकर 999 (0 और 999 सहित) तक की कितनी संख्याएँ 7 या 11 से विभाजित नहीं होती हैं ? 3

(ग) निम्नलिखित ग्राफ में प्रदेशों की संख्या ज्ञात कीजिए : 2



6. (क) 6-अंकों वाली कितनी संख्याएँ हैं, जिनके अंकों का गुणनफल प्रत्येक स्थिति में 24 होता है । 4

(ख) निम्नलिखित कथन का प्रतिस्थितिक, विलोम और निषेध लिखिए : 3

"यदि $n \in \mathbf{N}$ विषम है, तब n तीन विषम अभाज्य संख्याओं का योगफल है ।"

(ग) पुनरावृत्ति $a_n + 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = 5^n \ (n \geq 2)$ हल कीजिए । 3

7. (क) 10 शीर्षों पर एक 3-नियमित ग्राफ बनाइए । क्या तुल्यकारिता तक, एक अद्वितीय 6 शीर्षों वाला 3-नियमित ग्राफ होता है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 4

(ख) पुनरावृत्ति $b_{n+2}^2 = 4b_{n+1}^2, b_n > 0$ और $b_1 = 4$ को हल कीजिए । 4

(ग) RECURRENCE शब्द में अक्षरों के क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए । 2