No. of Printed Pages : 12

MTE-11

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2019

03482

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 7 is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions from questions no.* ***1*** *to* ***6****. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

1. (a) The weekly sales of two products A and B were recorded as given below :

Product A :	59	75	27	63	25	28	52
Product B :	15	20	12	31	33	28	22

Find out which of the two products shows greater fluctuation in sales. *6*

(b) Let X and Y be jointly distributed with p.d.f.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy), |x| < 1, |y| < 1 \\ 0 \qquad , \qquad \text{otherwise} \end{cases}$$

Check whether X and Y are independent. Also, determine the conditional distribution of Y for X = x. *4*

2. (a) A problem based on Statistics is given to two students A and B. The odds in favour of A solving the problem are 6 to 9 and against B solving the problem 12 to 10. If A and B attempt, find the probability of the problem being solved. 3

(b) The following data relates to the scores obtained by 9 salesmen of a company in an intelligence test and their weekly sales :

Salesmen	*Test Scores*	*Weekly Sales (in thousands of ₹)*
A	50	30
B	60	60
C	50	40
D	60	50
E	80	60
F	50	30
G	80	70
H	40	50
I	70	60

(i) Obtain the regression equation of sales on intelligence test scores of the salesmen.

(ii) If the intelligence test score of a salesman is 65, what would be his expected weekly sales ? 5

(c) If X is a random variable having binomial distribution with mean 2·4 and variance 1·44, find $P(X \geq 5)$. 2

3. (a) If $X_1, X_2, ..., X_n$ is a random sample taken from Poisson distribution (λ), then show that the sample mean $(\bar{x})$ is a consistent estimator of λ. *4*

(b) Let X be a random variable with density function $f(x) = 6x(1-x), 0 \le x \le 1$.

(i) Check whether it is a pdf or not.

(ii) Find cdf.

(iii) Compute $P\left(X \le \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right)$.

(iv) Determine the number k such that

$$P(X < k) = P(X > k).$$ *6*

4. (a) Show that the maximum likelihood estimator of the parameter θ of a population having the density function $\frac{2}{\theta^2}(\theta - x), 0 < x < \theta$, for a sample of unit size is 2x, where x is the sample value. Also, show that the estimate obtained is biased. *6*

(b) A sample of 100 items is taken at random from a batch known to contain 40% defectives. What is the probability that the sample contains

(i) at least 44 defectives ?

(ii) exactly 44 defectives ? *4*

[You may like to use the following values : $P(0 < Z < 0{\cdot}7143) = 0{\cdot}2624$, $P(0 < Z < 0{\cdot}9184) = 0{\cdot}3208$, $P(0 < Z < 12{\cdot}347) = 0{\cdot}5$]

5. (a) A firm wants to ascertain the real reasons for leaves availed by its employees in past 3 months. The table below shows the number of leaves taken by the employees of the firm. Construct both ogives with the help of the data given in the table :

Leaves Taken	*No. of Employees*
0 – 5	15
5 – 10	17
10 – 15	20
15 – 20	16
20 – 25	10
25 – 30	2

Estimate the median from the graph. *4*

(b) Products produced by a machine have 3% defective rate. What is the probability that the

(i) first defective occurs in the fifth item inspected ?

(ii) first defective occurs in the first five inspections ? *4*

(c) For a positively skewed distribution, the Pearson's coefficient of skewness is 1. If the standard deviation is 5, what will be the value of third central moment m_3 ? *2*

6. (a) Let the joint probability mass function of X and Y be

$$p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{21}, & x = 1, 2, 3 \text{ and } y = 1, 2 \\ 0 \quad , & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find the marginal pmf of x and y. Also find mean and variance of x and y. *6*

(b) A dice is thrown 60 times with the following results :

Face	1	2	3	4	5	6
Frequency	8	7	12	8	14	11

Test at 5% level of significance if the die is unbiased. *4*

[You may like to use the following values :
$\chi^2_{0\cdot05,\,5} = 11\cdot07$, $\chi^2_{0\cdot05,\,6} = 12\cdot59$,
$\chi^2_{0\cdot05,\,7} = 14\cdot07$]

7. Which of the following statements are *true* or *false* ? Give a short proof or counter example in support of your answer. *5×2=10*

(a) For any two events A and B, $P(A \cup B)$ cannot be greater than P(A) or P(B).

(b) The algebraic sum of deviations of a set of n values from their arithmetic mean is n.

(c) The mean and variance of the binomial distribution

$$({}^{20}C_x)\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{20-x}; \; x = 0, 1, 2, ..., 20$$

are 10 and 5, respectively.

(d) If the correlation coefficient between x and y is − 0·60, then the correlation coefficient between 2x − 1 and − 3y + 5 will be 0·60.

(e) If $X \sim N(0, 1)$, then the value of $P[-3{\cdot}2 \leq X \leq 0]$ will be 0·5.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(भारिता : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) दो उत्पादों A और B की साप्ताहिक बिक्री रिकॉर्ड की गई, जो नीचे दी गई है :

उत्पाद A :	59	75	27	63	25	28	52
उत्पाद B :	15	20	12	31	33	28	22

यह पता लगाइए कि दोनों उत्पादों में से कौन-से उत्पाद की बिक्री में अधिक उतार-चढ़ाव है । *6*

(ख) मान लीजिए कि X और Y संयुक्त बंटित हैं और उनका p.d.f. निम्नलिखित है :

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy), |x| < 1, |y| < 1 \\ 0 \quad , \quad \text{अन्यथा} \end{cases}$$

जाँच कीजिए कि X और Y स्वतंत्र हैं या नहीं । Y का X = x के लिए सप्रतिबंध बंटन भी ज्ञात कीजिए । *4*

2. (क) सांख्यिकी की एक समस्या दो विद्यार्थियों A और B को हल करने के लिए दी जाती है । A के समस्या हल करने के ऑड्स पक्ष में 6 और 9 हैं जबकि B के समस्या हल करने के ऑड्स विपक्ष में 12 और 10 हैं । यदि A और B दोनों प्रयास करते हैं, तो समस्या के हल हो जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । *3*

(ख) एक कम्पनी के 9 विक्रेताओं के एक बुद्धि परीक्षण में प्राप्त अंकों और उनकी साप्ताहिक बिक्री से संबंधित आँकड़े नीचे दिए गए हैं :

विक्रेता	*परीक्षण अंक*	*साप्ताहिक बिक्री (हजार ₹ में)*
A	50	30
B	60	60
C	50	40
D	60	50
E	80	60
F	50	30
G	80	70
H	40	50
I	70	60

(i) विक्रेताओं द्वारा की गई बिक्री की बुद्धि परीक्षण अंकों पर समाश्रयण समीकरण प्राप्त कीजिए ।

(ii) यदि एक विक्रेता के बुद्धि परीक्षण में अंक 65 हैं, तो उसकी प्रत्याशित साप्ताहिक बिक्री क्या होगी ? *5*

(ग) यदि X एक द्विपद बंटन का यादृच्छिक चर है जिसका माध्य 2·4 और प्रसरण 1·44 है, तो $P(X \geq 5)$ ज्ञात कीजिए । *2*

3. (क) यदि $X_1, X_2, ..., X_n$ एक प्वासों बंटन (λ) से लिया गया यादृच्छिक प्रतिदर्श है, तो दर्शाइए कि प्रतिदर्श माध्य $(\bar{x})$, λ का एक संगत आकलक है । 4

(ख) मान लीजिए कि X, घनत्व फलन

$$f(x) = 6x(1 - x),\ 0 \leq x \leq 1$$

वाला एक यादृच्छिक चर है ।

(i) जाँच कीजिए कि यह pdf है या नहीं ।

(ii) cdf ज्ञात कीजिए ।

(iii) $P\left(X \leq \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$ निकालिए ।

(iv) संख्या k का मान ज्ञात कीजिए जबकि

$$P(X < k) = P(X > k).$$ 6

4. (क) दर्शाइए कि घनत्व फलन $\frac{2}{\theta^2}(\theta - x),\ 0 < x < \theta$ वाली एक समष्टि के प्राचल θ का इकाई आकार के प्रतिदर्श के लिए अधिकतम संभावित आकलक 2x है, जहाँ x प्रतिदर्श मान है । यह भी दर्शाइए कि प्राप्त आकलन अभिनत है । 6

(ख) एक वस्तुओं का बैच, जिसमें 40% खराब वस्तुओं के होने का पता है, से 100 वस्तुओं का एक प्रतिदर्श यादृच्छया निकाला जाता है । वह प्रायिकता क्या है कि

(i) कम-से-कम 44 वस्तुएँ खराब होंगी ?

(ii) ठीक 44 वस्तुएँ खराब होंगी ? 4

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :
$P(0 < Z < 0{\cdot}7143) = 0{\cdot}2624$, $P(0 < Z < 0{\cdot}9184) = 0{\cdot}3208$, $P(0 < Z < 12{\cdot}347) = 0{\cdot}5$]

5. (क) एक फर्म अपने कर्मचारियों द्वारा पिछले 3 महीनों में ली गई छुट्टियों का वास्तविक कारण जानना चाहती है । फर्म के कर्मचारियों द्वारा ली गई छुट्टियाँ नीचे तालिका में दी गई हैं । तालिका में दिए गए आंकड़ों की सहायता से दोनों प्रकार के तोरण वक्र खींचिए :

ली गई छुट्टियाँ	*कर्मचारियों की संख्या*
0 – 5	15
5 – 10	17
10 – 15	20
15 – 20	16
20 – 25	10
25 – 30	2

ग्राफ से माध्यिका का आकलन कीजिए । *4*

(ख) एक मशीन द्वारा बने उत्पादों के खराब निकलने की दर 3% है । वह प्रायिकता क्या है कि

(i) निरीक्षण किया गया पाँचवाँ उत्पाद पहला खराब उत्पाद निकलता है ?

(ii) पहले पाँच उत्पादों के निरीक्षण में पहला खराब उत्पाद निकलता है ? *4*

(ग) एक धनात्मक वैषम्य बंटन के लिए वैषम्यता का पीयरसन गुणांक 1 है । यदि मानक विचलन 5 है, तो तृतीय केंद्रीय आघूर्ण m_3 का मान क्या होगा ? *2*

6. (क) मान लीजिए कि X और Y का संयुक्त प्रायिकता द्रव्यमान फलन निम्नलिखित है :

$$p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{21}, & x = 1, 2, 3 \text{ और } y = 1, 2 \\ 0 \quad , & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

x और y के उपांत pmf ज्ञात कीजिए । x और y के माध्य और प्रसरण भी ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) एक पाँसा 60 बार उछाला जाता है और निम्नलिखित परिणाम दर्शाता है :

फलक	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	8	7	12	8	14	11

5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए कि पाँसा अनभिनत है । *4*

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$\chi^2_{0\cdot05,\,5} = 11\cdot07$, $\chi^2_{0\cdot05,\,6} = 12\cdot59$,

$\chi^2_{0\cdot05,\,7} = 14\cdot07$]

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं अथवा *असत्य* ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए । *5×2=10*

(क) किन्हीं भी दो घटनाओं A और B के लिए, $P(A \cup B)$, $P(A)$ या $P(B)$ से अधिक नहीं हो सकता है ।

(ख) n मानों के एक समुच्चय का उनके समान्तर माध्य से लिए गए विचलनों का बीजगणितीय योगफल n होता है ।

(ग) द्विपद बंटन

$$({}^{20}C_x)\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{20-x}; x = 0, 1, 2, ..., 20$$

का माध्य और प्रसरण क्रमशः 10 और 5 होगा ।

(घ) यदि x और y के बीच सहसंबंध गुणांक $-0{\cdot}60$ है, तो $2x-1$ और $-3y+5$ के बीच सहसंबंध गुणांक $0{\cdot}60$ होगा ।

(ङ) यदि $X \sim N(0, 1)$ है, तो $P[-3{\cdot}2 \le X \le 0]$ का मान $0{\cdot}5$ होगा ।