

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

03872 Term-End Examination

June, 2019

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : Answer any **five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is **not** allowed. Symbols have their usual meanings.

1. (a) Solve the following system of linear equations using the Gauss elimination method with partial pivoting : 4

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1$$

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$$

- (b) Set up the iteration method in matrix form for the system of linear equations :

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_3 - x_4 = 1$$

$$2x_2 + 3x_4 = 2.$$

Determine whether the method converges or not. 4

- (c) Find the value of $p(2)$ and $p'(2)$ for the polynomial

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$$

using Horner's method.

2

2. (a) Given the following data, estimate the value of $f(9)$ using Lagrange's interpolation :

3

x	f(x)
1	-3
5	10
7	9
10	15

- (b) Find the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

using Gauss-Jordan method.

4

- (c) Perform three iterations of Newton-Raphson method to approximate a root of the equation

$$f(x) = x^4 - x + 1 = 0,$$

starting with $x_0 = 0$.

3

3. (a) Estimate the eigenvalues of the matrix using Gerschgorin bounds

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Also, give a rough sketch of the bounds. 5

- (b) A numerical differentiation formula for finding $f'(x_k)$ is given by

$$f'_k = \frac{1}{12h} [f_{k-2} - 8f_{k-1} + 8f_{k+1} - f_{k+2}],$$

where $f(x_{k-n}) = f(x_n - nh)$.

Using the Taylor series expansion, find the truncation error of the formula. 5

4. (a) Consider the table of values of $f(x) = xe^x$ given below :

x	f(x)
1.8	10.8894
1.9	12.7032
2.0	14.7781
2.1	17.1489
2.2	19.8550

Find $f''(2.0)$ using the central difference formula of $O(h^2)$ for $h = 0.1$ and $h = 0.2$.

Calculate TE in both the cases. 6

- (b) The equation $x^2 + ax + b = 0$ has two real roots p and q such that $|p| < |q|$. If we use the fixed point iteration

$$x_{k+1} = -\frac{b}{x_k + a}$$

to find a root, then to which root does it converge?

4

5. (a) Find the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

using LU decomposition method.

5

- (b) Find the value of α to ensure the fastest possible convergence with the iteration formula

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + x_n^{-2} + 1}{\alpha + 1}.$$

5

6. (a) Using Newton's divided differences, find a polynomial that fits the data :

4

x	f(x)
-1	2
0	1
1	0
3	-1

- (b) Using the classical fourth order Runge-Kutta method, find the approximate value of $y(0.4)$ for the initial value problem

$$y' = 2 + x^2 - xy, \quad y(0) = 0$$

with the step size $h = 0.2$.

6

7. (a) Perform three iterations of power method to find the largest eigenvalue in magnitude and the corresponding eigenvector of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Take $x_0 = (1, 0, 0)^T$.

5

(b) Compute

$$\int_1^2 \ln x \, dx$$

using the Romberg integral technique on the approximate integrals evaluated by the trapezoidal rule taking $h = 0.5$ and 0.25 . The tabulated values of $f(x) = \ln x$ are given below :

5

x	f(x)
1.0	0
1.25	0.223
1.5	0.405
1.75	0.560
2.0	0.693

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन 3 दशमलव स्थानों तक दिए जा सकते हैं । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।

1. (क) आंशिक कीलकन द्वारा गाउसीय विलोपन विधि से निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

4

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1$$

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$$

- (ख) रैखिक समीकरण निकाय

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_3 - x_4 = 1$$

$$2x_2 + 3x_4 = 2$$

के लिए आव्यूह रूप में पुनरावृत्ति विधि स्थापित कीजिए । निर्धारित कीजिए कि विधि अभिसरित होती है या नहीं ।

4

(ग) हॉर्नर विधि से बहुपद

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$$

के लिए $p(2)$ और $p'(2)$ के मान ज्ञात कीजिए । 2

2. (क) लग्रांज अन्तर्वेशन द्वारा निम्नलिखित आँकड़ों से $f(9)$ का मान आकलित कीजिए : 3

x	f(x)
1	-3
5	10
7	9
10	15

(ख) गाउस-जॉर्डन विधि से आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । 4

(ग) $x_0 = 0$ से प्रारंभ करके समीकरण

$$f(x) = x^4 - x + 1 = 0$$

के मूल का सन्निकटन करने के लिए न्यूटन-रैफसन विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ कीजिए । 3

3. (क) गर्शगोरिन परिबंधों से आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमान आकलित कीजिए । परिबंधों का रेखांकन मोटे तौर पर कीजिए ।

5

(ख) $f'(x_k)$ प्राप्त करने के लिए संख्यात्मक अवकलन सूत्र इस प्रकार है :

$$f'_k = \frac{1}{12h} [f_{k-2} - 8f_{k-1} + 8f_{k+1} - f_{k+2}],$$

जहाँ $f(x_{k-n}) = f(x_n - nh)$.

टेल्र श्रेणी प्रसार का प्रयोग करके सूत्र की रूंडन त्रुटि ज्ञात कीजिए ।

5

4. (क) $f(x) = xe^x$ के मानों की तालिका नीचे दी गई है :

x	f(x)
1.8	10.8894
1.9	12.7032
2.0	14.7781
2.1	17.1489
2.2	19.8550

$h = 0.1$ और $h = 0.2$ के लिए $O(h^2)$ के केन्द्रीय अंतर सूत्र का प्रयोग करके $f''(2.0)$ ज्ञात कीजिए । दोनों स्थितियों में रूंडन त्रुटि परिकलित कीजिए ।

6

(ख) समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के ऐसे दो वास्तविक मूल p और q हैं जिसके लिए $|p| < |q|$. यदि हम एक मूल ज्ञात करने के लिए नियत बिंदु पुनरावृत्ति

$$x_{k+1} = -\frac{b}{x_k + a}$$

का प्रयोग करते हैं, तो यह किस मूल की ओर अभिसरित होगी ?

4

5. (क) LU वियोजन विधि से आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

5

(ख) पुनरावृत्ति सूत्र

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + x_n^{-2} + 1}{\alpha + 1}$$

के साथ तीव्रतम संभावित अभिसरण सुनिश्चित करने के लिए α का मान ज्ञात कीजिए ।

5

6. (क) न्यूटन के विभाजित अंतरों द्वारा एक ऐसा बहुपद ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित आँकड़े में फिट हो सके : 4

x	f(x)
-1	2
0	1
1	0
3	-1

- (ख) चिरप्रतिष्ठित चतुर्थ कोटि रूंगे-कुट्टा विधि द्वारा आदिमान समस्या $y' = 2 + x^2 - xy$, $y(0) = 0$ के लिए सोपान आमाप $h = 0.2$ लेकर $y(0.4)$ का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए । 6

7. (क) घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ करके आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

का परिमाण में बृहत्तम आइगेनमान और संगत आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए ।

$x_0 = (1, 0, 0)^T$ लीजिए । 5

(ख) $h = 0.5$ और 0.25 लेते हुए समलंबी नियम द्वारा मूल्यांकित सन्निकट समाकलों पर रॉम्बर्ग समाकल तकनीक का प्रयोग करके

$$\int_1^2 \ln x \, dx$$

परिकलित कीजिए। $f(x) = \ln x$ के तालिकाबद्ध मान नीचे दिए गए हैं :

5

x	f(x)
1.0	0
1.25	0.223
1.5	0.405
1.75	0.560
2.0	0.693